

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA AEROSPAZIALE

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA IN
INGEGNERIA AEROSPAZIALE E ASTRONAUTICA
(CLASSE DELLE LAUREE SPECIALISTICHE N.25/S)

**ANALISI AERODINAMICA DI UN ROTORE IN HOVERING
CON MODELLI DI SCIA A VORTONI**

Relatori: Ch.mi
Prof. Carlo de NICOLA
Ph.D. Ing. Paolo CACCAVALE

Candidato:
Mario TROIANO
Matr. 335/310

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

alla mia famiglia e a Nunzia

Indice

INTRODUZIONE	1
1 AERODINAMICA DI UN ROTORE IN HOVERING	4
1.1 Caratteristiche della scia	5
1.2 Metodi di analisi sperimentale	7
1.3 Metodi di analisi numerica	7
1.3.1 Metodi Navier-Stokes	9
1.3.2 Metodi a vortice	10
1.3.3 Metodi ibridi	14
2 FLUSSO INCOMPRESSIBILE E NON VISCOSO	15
2.1 Il dominio	16
2.2 Teorema di Helmholtz	18
2.3 Conservazione della massa ed evoluzione della vorticità	20
2.4 Equazione di Laplace e di Poisson	23
2.5 Legge di Biot-Savart	25
2.5.1 La velocità indotta da un segmento vorticoso	27
2.5.2 Vortex Core	28
2.6 Condizioni al contorno	29
2.6.1 Condizioni al contorno a parete	30
2.7 Condizione di Kutta sul bordo d'uscita dell'ala	30
2.8 Equazione di Bernoulli instazionaria	32

2.9	Calcolo di forze e momenti	34
3	METODI A PANNELLI	36
3.1	Formulazione del metodo a pannelli	36
3.1.1	Condizioni al contorno	40
3.1.2	Calcolo di velocità e forze	41
3.2	Metodi a pannelli non stazionari	43
3.2.1	Modello di scia instazionaria a pannelli	43
3.2.2	Calcolo di velocità e forze	46
4	MODELLI DI SCIA A VORTONI E CODICE PaMS	47
4.1	I vortoni	48
4.2	Conversione dei pannelli di scia in vortoni	54
4.3	Codice PaMS	56
4.4	Parametri caratteristici della scia	57
4.4.1	Estensione della scia	58
4.4.2	Modellazione della scia	59
4.4.3	Forma della scia	60
5	RISULTATI PER IL TEST NASA TM81232	66
5.1	Dati sperimentali NASA TM81232	66
5.2	Modello numerico	69
5.3	Analisi dei risultati	73
	CONCLUSIONI	97
	BIBLIOGRAFIA	99

Elenco delle figure

1.1	scia di un rotore a singola pala	6
1.2	tecniche di analisi sperimentale per un rotore in hovering	8
1.3	griglie ad alta risoluzione per singola pala in hovering	10
1.4	scia classica descritta da Landgrebe (1972)	13
1.5	rappresentazione della scia vorticoso	14
1.6	metodo ibrido	14
2.1	dominio	16
2.2	dominio considerato nella derivazione del teorema di Green	19
2.3	velocità indotta da una distribuzione di vortici	26
2.4	vortex core	29
2.5	condizione di Kutta	32
3.1	teorema di Green	37
3.2	sistema di riferimento locale del pannello	42
3.3	scia rigida e flessibile	45
4.1	tubo vorticoso e vortone	49
4.2	campo di moto indotto da un vortone	50
4.3	campo di moto indotto da un vortice 2D	51
4.4	modello di scia con vortoni	54
4.5	modello DIAS	56

4.6 rotore in hovering: effetto del <i>troncamento</i> della scia	59
4.7 ala, modelli di scia	61
4.8 rotore in hovering, modelli di scia	62
4.9 rotore in hovering, modelli di scia	63
4.10 ala, effetto <i>vortex core</i>	64
4.11 rotore in hovering, effetto del <i>vortex core</i>	65
5.1 rotore NASA	68
5.2 traiettoria sperimentale del vortice di estremità	68
5.3 CAD delle pale con traccia delle stazioni di rilevamento della pressione	68
5.4 pannellazione usata nelle simulazioni	69
5.5 PaMS, traiettoria vortoni	72
5.6 coefficiente di spinta C_T	75
5.7 coefficiente di spinta C_T nei primi istanti di simulazione	76
5.8 scia con <i>near wake</i> di 2 pannelli: distribuzione di C_l per $Dt = 0.002s$	77
5.9 scia con <i>near wake</i> di 2 pannelli: distribuzione di C_l per $Dt = 0.003s$	78
5.10 scia con <i>near wake</i> di 2 pannelli: distribuzione di C_l per $Dt = 0.004s$	79
5.11 scia con <i>near wake</i> di 2 pannelli, traiettoria del <i>tip vortex</i>	80
5.12 effetto del <i>vortex core radius</i> sulla forma della scia	81
5.13 scia con <i>near wake</i> di un giro: <i>tip vortex</i>	83
5.14 scia con <i>near wake</i> di un giro: coefficiente di spinta (C_T)	84
5.15 scia con <i>near wake</i> di un giro: traiettoria del <i>tip vortex</i>	85
5.16 scia con <i>near wake</i> di un giro: distribuzione di C_l per $Dt = 0.002s$	86
5.17 scia con <i>near wake</i> di un giro: distribuzione di C_l per $Dt = 0.003s$	87
5.18 scia con <i>near wake</i> di un giro: distribuzione di C_l per $Dt = 0.004s$	88
5.19 scia 1 DoF: coefficiente di spinta (C_T)	91
5.20 scia 1 DoF: distribuzione di C_l per $Dt = 0.002s$	92
5.21 scia 1 DoF: distribuzione di C_l per $Dt = 0.003s$	93
5.22 scia 1 DoF: distribuzione di C_l per $Dt = 0.004s$	94

Lista delle figure

5.23	scia 1 DoF: posizione assiale del <i>tip vortex</i>	95
5.24	scia 1 DoF: distribuzione di C_l per $Dt = 0.002s$ e $r_c/D = 0.004$. .	96

INTRODUZIONE

L'hovering è un regime di funzionamento fondamentale per un rotore e consiste nella generazione di una forza di sustentazione quando è investito da una corrente di velocità asintotica nulla, condizione simile al funzionamento a punto fisso di un'elica.

Il campo di moto di un rotore è estremamente difficile da analizzare sia numericamente che sperimentalmente a causa della complessità della scia generata dalle pale. Determinare la struttura della scia di un rotore è quindi di fondamentale importanza per la valutazione della distribuzione di carico, della risposta strutturale e di fenomeni di interferenza con elementi investiti dalla scia come fusoliera, impennaggi, rotori di coda.

La caratteristica principale della scia di una pala è la presenza di un vortice di estremità molto intenso che, nelle prime rivoluzioni, si propaga verso valle con traiettoria elicoidale, andamento che si perde con l'aumentare dell'*età* della scia a causa di deformazioni autoindotte.

Un altro aspetto caratteristico del campo di moto di un rotore in hovering è l'esistenza di una forte interdipendenza tra la distribuzione di carico sulle pale e la distribuzione di vorticità nel dominio: per calcolare il carico alare è necessario conoscere la velocità indotta sul rotore dalla distribuzione di elementi vorticosi nella scia ma la forma ed evoluzione di quest'ultima dipendono a loro volta dalla incognita distribuzione di carico.

Il problema, chiaramente non lineare, può essere risolto solo con modelli di scia semplificati, come fatto negli anni '60 e '70 con i modelli *rigid wake* e *prescribed wake*, o con metodi iterativi (*free wake*) in cui il campo di moto e quindi la scia sono calcolati risolvendo equazioni di Navier-Stokes con opportune ipotesi semplificative.

Lo stato dell'arte nella simulazione numerica della dinamica dei fluidi è rappresentato da metodi CFD (Computational Fluid Dynamics) basati su equazioni RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) con griglie ad alta risoluzione, queste ultime sono fondamentali per contenere la diffusione numerica. Questi metodi forniscono una stima molto accurata delle prestazioni di un rotore grazie all'elevato livello di dettaglio nella cattura della scia ma risultano molto onerosi, sia dal punto di vista computazionale che di preparazione dei calcoli, risultando poco adatti se non improponibili come strumento di supporto alla progettazione. In quest'ottica può risultare più adeguato un metodo a vortici, meno complesso e completo dei metodi CFD basati su NS ma computazionalmente più efficiente in termini di rapporto tra qualità dei risultati e tempi di calcolo.

In questo lavoro si effettua l'analisi aerodinamica di un rotore in hovering utilizzando un modello di scia a vortoni (o *vortex particles*) implementato nel codice a pannelli **PaMS** (**P**anel **M**ethod **S**olver), un *solver* 3D open-source sviluppato presso il DIAS (Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale). Il metodo a vortoni si basa sulle stesse ipotesi dei tradizionali metodi a pannelli, ne conserva i vantaggi computazionali in termini di tempi di calcolo ed accuratezza della soluzione ma consente l'analisi di fenomeni di interazione tra scia e corpo. I vortoni sono elementi computazionali differenti da doppiette, sorgenti e anelli vorticosi, generalmente adoperati nei classici metodi a pannelli, e possono essere considerati come vortici tridimensionali puntiformi.

Lo scopo del lavoro è determinare, tramite confronto numerico-sperimentale, l'impatto della variazione di alcuni parametri di modello sulla qualità della soluzione al fine di individuare le impostazioni che forniscono il migliore accordo della soluzione numerica con quella sperimentale da utilizzare come punto di partenza per eventuali applicazioni future.

I test hanno mostrato che la distribuzione di carico lungo le pale dipende principalmente dal campo di velocità localmente indotto dagli elementi computazionali che sono in prossimità del rotore e solo in maniera minore dalla forma ed evoluzione della scia.

Il lavoro è suddiviso in cinque capitoli. Inizialmente viene presentata una panoramica delle caratteristiche della scia e delle principali tecniche di analisi fluidodinamica, successivamente viene trattato il modello a potenziale, segue una panoramica sulla tecnica a pannelli per la soluzione del campo di moto e una introduzione al modello di scia a vortoni con la sua implementazione nel codice PaMS, i risultati ottenuti e il confronto con dati sperimentali sono oggetto del quinto e ultimo capitolo.

Capitolo 1

AERODINAMICA DI UN ROTORE IN HOVERING

La previsione della forma ed evoluzione della scia di un rotore è di fondamentale importanza per una stima corretta dei carichi aerodinamici sulle pale e quindi delle prestazioni.

Il concetto di disco attuatore, insieme con la teoria dell'elemento di pala, fornisce risultati apprezzabili nella stima delle prestazioni globali di un rotore ma risulta completamente inadeguato per l'analisi del campo di moto locale e per la valutazione delle distribuzioni di carico sulle pale, di conseguenza risulta necessario ricorrere a modelli numerici meno semplificati.

In questo capitolo vengono descritte le principali caratteristiche della scia di un rotore in hovering e viene effettuata una panoramica dei metodi di analisi generalmente utilizzati per la soluzione del problema concentrando l'attenzione sui metodi a vortice utilizzati in questo lavoro di tesi.

1.1 Caratteristiche della scia

La corretta determinazione dei carichi aerodinamici sulle pale è possibile solo attraverso la conoscenza accurata del campo di velocità in prossimità del rotore che nel caso specifico di hovering dipende esclusivamente dalla distribuzione di vorticità nel dominio in quanto la velocità asintotica della corrente è nulla.

Un rotore è costituito da un numero finito di pale che possono essere considerate delle ali rotanti caratterizzate da una distribuzione di portanza alla quale corrisponde, per il teorema di Kutta-Zhukowsky, una distribuzione di vorticità. Il teorema di Helmholtz fa corrispondere a questo sistema di vortici aderenti, che modella la vorticità legata alla portanza, un sistema di vortici liberi rilasciati a valle del bordo di uscita e di intensità pari alla variazione di circolazione sulla pala. Detta Γ l'intensità del tubo vorticoso alla generica stazione della pala, in seguito ad una variazione $d\Gamma$ avviene il rilascio di un vortice libero di intensità pari ed opposta.

La variazione continua della portanza lungo la pala, e quindi della circolazione di velocità ad essa collegata, determina un sistema di vortici liberi che partono dal bordo di uscita e formano una superficie vorticoso. In linea di principio, una volta nota la distribuzione dei vortici nel dominio è possibile determinare il campo di moto con la legge di Biot-Savart. La distribuzione di velocità indotta dal sistema di vortici aderenti e vortici liberi costituisce la scia del rotore.

La principale caratteristica della scia di un rotore in hovering è il vortice di estremità molto intenso perchè, in tale zona della pala, la velocità periferica è massima, ricordiamo infatti che risulta $V_T = \Omega R$, e perchè le variazioni di circolazione $d\Gamma$ sono molto intense a causa della forte variazione di carico alare, la portanza infatti raggiunge un picco intorno all'80 ÷ 95% del raggio

per poi assumere valore nullo all'estremità. La grande intensità dei vortici liberi di estremità determina un rapido *roll up* della superficie vorticososa con la formazione di un vortice concentrato di intensità pari quasi alla circolazione totale presente sulla pala. Il vortice di estremità presenta una traiettoria elicoidale nelle prime rivoluzioni, successivamente subentrano deformazioni autoindotte che insieme alla interdipendenza tra distribuzione di vorticità nella scia e distribuzione di carico sulle pale rendono particolarmente difficile lo studio numerico e sperimentale del campo di moto di un rotore in hovering.

Ulteriori aspetti caratteristici della scia di un rotore in hovering sono stati osservati sperimentalmente da Gray prima e successivamente da Landgrebe e possono essere così sintetizzati: la scia presenta una contrazione immediatamente a valle del rotore inoltre il sistema interno di vortici ha una velocità assiale che cresce con il raggio e che è mediamente maggiore di quella del vortice di estremità, il risultato è un progressivo aumento dell'inclinazione della superficie che modella i vortici interni come osservabile nella figura 1.1.

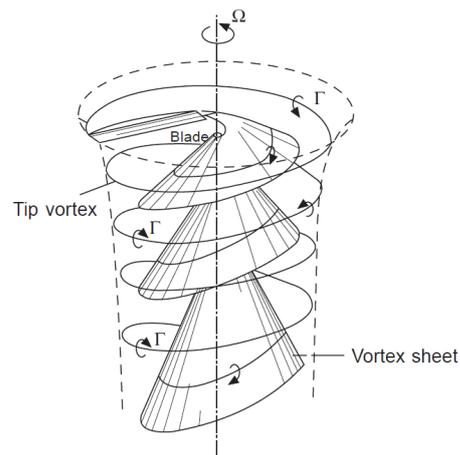


Figura 1.1: scia di un rotore a singola pala

1.2 Metodi di analisi sperimentale

Come affermato precedentemente il campo di moto a valle di un rotore è estremamente complesso. A differenza dell'ala fissa è fortemente non lineare e questo comporta grosse difficoltà sia nella simulazione numerica, che sfrutta metodi iterativi per la ricerca della soluzione, sia nelle osservazioni sperimentali in quanto i fenomeni fortemente non lineari sono difficili da interpretare.

Gli studi sperimentali sono di fondamentale importanza non solo per la validazione dei modelli computazionali ma anche perchè forniscono importanti informazioni per la corretta definizione delle condizioni al contorno per i metodi CFD (Computational Fluid Dynamics)¹. Le tecniche maggiormente utilizzate sono: visualizzazione della scia per mezzo di fumo, LDV (Laser Doppler Velocimetry), PIV (Particle Image Velocimetry), misurazione delle velocità direttamente nella scia con anemometria a filo caldo [14] [31] [19].

1.3 Metodi di analisi numerica

I progressi nell'ambito della tecnologia informatica hanno permesso l'utilizzo di tecniche sempre più accurate per lo studio dei problemi relativi alla scia di un rotore.

Lo studio numerico dell'aerodinamica di un rotore viene effettuato risolvendo le equazioni di Navier-Stokes (NS) opportunamente semplificate in quanto la tecnologia attuale non consente ancora la loro soluzione diretta (Direct Numerical Simulation). Al momento le equazioni RANS (Reynolds

¹Una non corretta definizione delle condizioni al contorno sulla griglia computazionale può determinare fenomeni di ricircolo con conseguente errore di valutazione del campo di moto

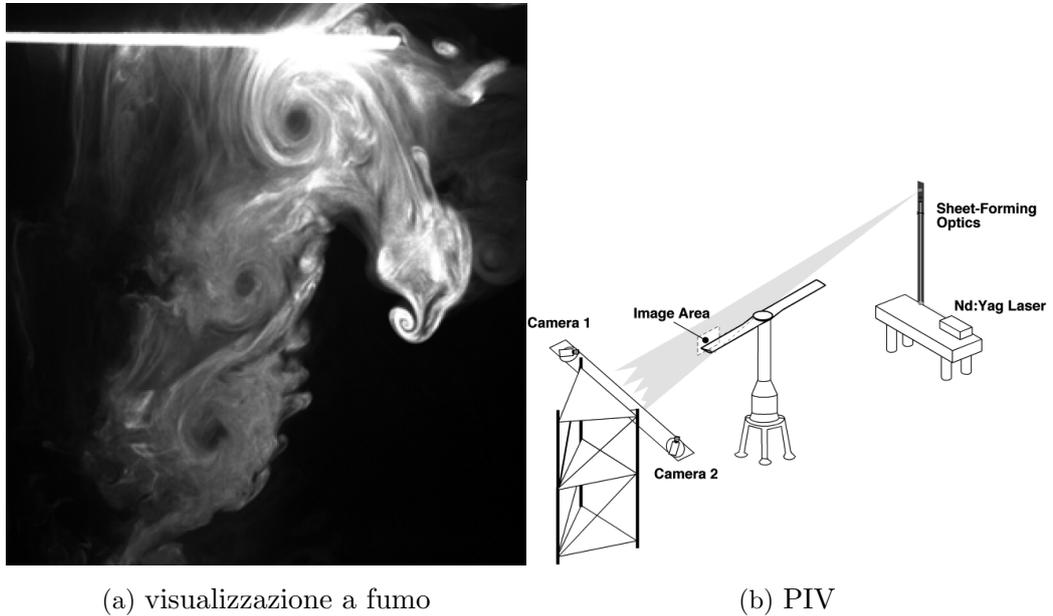


Figura 1.2: tecniche di analisi sperimentale per un rotore in hovering

Averaged Navier-Stokes) accoppiate a griglie computazionali ad alta risoluzione forniscono il più alto livello di accuratezza per l'analisi del campo aerodinamico di rotori (o eliche) ma sono caratterizzati da tempi di calcolo elevati, difficoltà nel catturare l'evoluzione della scia nel campo lontano e necessità di controllare l'errore numerico.

Procedendo in ordine decrescente di accuratezza del modello troviamo le equazioni di Eulero, ottenute a partire dalle NS in assenza di viscosità. Il costo computazionale è minore rispetto alle RANS tuttavia persistono problemi legati all'impatto dell'errore numerico e ai tempi di calcolo.

In ipotesi di flusso non viscoso, incomprimibile ed irrotazionale è possibile definire un potenziale scalare di velocità e le equazioni di NS si riducono all'equazione di Laplace. Il calcolo del campo di moto si riduce allora ad un problema di ricerca della soluzione della sola equazione di Laplace con opportune condizioni al contorno. Data la linearità dell'equazione, la solu-

zione può essere ottenuta come combinazione lineare di soluzioni elementari. Questo è alla base dei metodi a vortice, in cui la scia viene modellata con una distribuzione di elementi vorticosi. Una volta nota la distribuzione di elementi computazionali nel dominio è possibile determinare il campo di velocità. I metodi a potenziale sono caratterizzati da una elevata efficienza computazionale in quanto, nelle ipotesi di validità del metodo, forniscono risultati accurati in tempi relativamente brevi.

1.3.1 Metodi Navier-Stokes

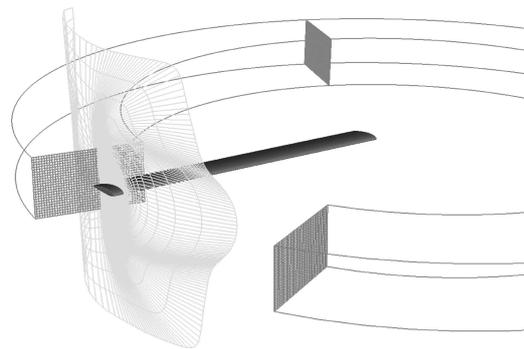
La CFD usa metodi alle differenze finite, agli elementi finiti o volumi finiti per risolvere le equazioni di NS, nella forma RANS o URANS (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes).

La CFD generalmente fornisce una descrizione dettagliata della scia di un rotore ma presenta degli aspetti che ne limitano l'applicabilità nello studio dell'hovering. La presenza di zone del dominio caratterizzate da una elevata concentrazione di vorticità richiede l'utilizzo di griglie ad alta risoluzione per contenere l'errore numerico che si manifesta come diffusione artificiale.

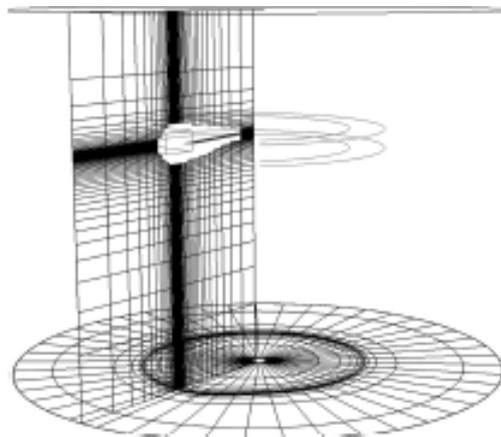
L'errore numerico è un parametro che condiziona profondamente le simulazioni con la CFD. Anche risolvendo equazioni esatte, ovvero che descrivono perfettamente il fenomeno fisico, il risultato non sarà mai in perfetto accordo con la realtà a causa dell'errore numerico che può essere solo limitato ma non eliminato.

La riduzione dell'errore numerico e la simulazione dell'aerodinamica istazionaria di un'ala rotante richiede griglie computazionali ad alta risoluzione, per contenere la diffusione artificiale [10], con conseguente incremento dei costi computazionali in termini di risorse hardware, tempi di preparazione delle griglie e tempi di calcolo.

Inoltre, la definizione delle condizioni al contorno sul bordo del dominio è un aspetto delicato delle simulazioni CFD di rotori in hovering in quanto è possibile incorrere in errori determinati dalla simulazione di fenomeni di ricircolo della corrente, Srinivasan suggerisce l'impostazione di condizioni al contorno basate sulla legge di conservazione della massa [48] [49] [50].



(a) griglie per pala e vortici



(b) griglie per dominio e vortici

Figura 1.3: griglie ad alta risoluzione per singola pala in hovering

1.3.2 Metodi a vortice

I metodi a vortice sono tecniche approssimate per la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes in ipotesi di flusso instazionario, incomprimibile e con

alto numero di Reynolds. In questo modello il campo di vorticità viene discretizzato con un insieme di elementi vorticosi ciascuno caratterizzato da una propria intensità e direzione determinate inizialmente in base al valore della circolazione presente sul corpo portante, la convezione di vorticità viene valutata come lo spostamento di tali elementi per effetto della velocità locale mentre l'intensità e la direzione variano per effetto di eventuali gradienti di velocità.

La velocità nel dominio è la somma della velocità asintotica e di quella indotta dalla distribuzione di elementi computazionali valutata con la relazione di Biot-Savart opportunamente accoppiata ad una *vortex core function* per superare i problemi di singolarità².

Il principale vantaggio offerto dai metodi a vortice è la minima diffusione numerica nella valutazione dell'evoluzione della vorticità nel dominio, che rende tali metodi particolarmente adatti per la simulazione di rotori in hovering, al quale si aggiunge l'assenza della griglia computazionale che determina una riduzione dei tempi di preparazione delle simulazioni, una maggiore versatilità e minori difficoltà nelle simulazioni di corpi in movimento relativo.

Nel caso di rotori in hovering, la velocità asintotica è nulla e l'intensità e posizione degli elementi computazionali dipende dal carico aerodinamico sulle pale, ricordando che quest'ultimo è a sua volta determinato dalla velocità indotta dal sistema vorticoso sul rotore, appare evidente la complessità del problema che non ammette semplici soluzioni analitiche. I metodi a vortice per l'analisi dell'aerodinamica dell'hovering possono essere classificati in base al modello di scia adoperato, in particolare in ordine crescente di accuratezza troviamo: modello con scia rigida, modello con scia prescritta e modello con scia libera.

²fare riferimento al paragrafo 2.5

Il modello di *scia rigida* (*rigid wake*) è stato il primo ad essere adoperato per l'analisi di un rotore in hovering e consiste nel modellare il sistema di vortici liberi con filamenti vorticosi che si spostano verso valle con traiettoria elicoidale, risultato della composizione della velocità di rotazione del rotore e della velocità assiale calcolata utilizzando la teoria impulsiva semplice. In questo modello l'intensità dei vortici alle varie stazioni è determinata mediante teorie approssimate come quella dell'elemento di pala. La semplicità del modello determina una scarsa accuratezza nel calcolo del carico aerodinamico con errori tanto più significativi quanto più elevati sono i livelli di spinta e il numero di Mach, tale aspetto è sicuramente legato all'impossibilità per il modello di simulare le deformazioni della scia reale.

Il modello di *scia prescritta* (*prescribed wake*) è stato proposto per la prima volta da Landgrebe³ [37] e prevede l'utilizzo di dati sperimentali per la determinazione della forma della scia e dell'intensità dei vortici. Il suddetto modello permette il calcolo accurato delle prestazioni di un rotore ma ha l'enorme limite di essere vincolato a risultati sperimentali, questo lo rende completamente inadeguato per la previsione della scia di un rotore in configurazioni diverse da quelle testate sperimentalmente.

Il modello di *scia libera* (*free wake*) non prevede ipotesi restrittive sulla scia e attualmente costituisce lo standard industriale. Nei metodi *free wake* l'evoluzione della scia viene calcolata, in maniera iterativa, considerando la velocità localmente indotta dalla distribuzione istantanea di elementi computazionali determinata dal carico alare, quest'ultimo non è noto a priori ma deve essere valutato per ogni istante di tempo con opportune tecniche, ad esempio il metodo a pannelli.

³Landgrebe grazie ad osservazioni sperimentali ha formulato relazioni semi-empiriche tra posizione radiale e assiale del vortice di estremità ed angolo di azimuth

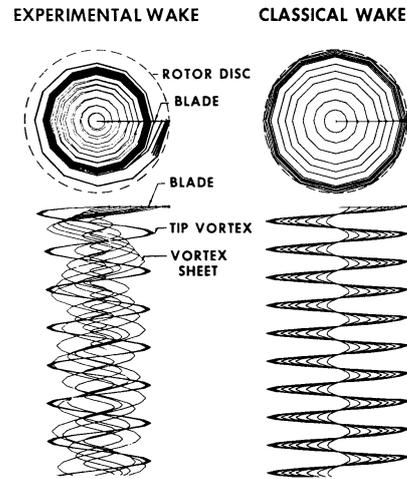


Figura 1.4: scia classica descritta da Landgrebe (1972)

Il metodo a pannelli può essere considerato una sottoclasse dei metodi a vortice ed è particolarmente adatto alla determinazione del carico aerodinamico di superfici portanti o di corpi dotati di scia tanto sottile da poter essere idealizzata come una superficie. Il corpo aerodinamico viene discretizzato in pannelli ognuno con una incognita distribuzione di sorgenti e doppiette per la simulazione dello spessore e della vorticità locale. La scia invece viene modellata come una distribuzione di sole doppiette (o anelli vorticosi) e l'intensità degli elementi è legata al valore istantaneo della circolazione di velocità sul corpo nel momento in cui essi sono immessi nel dominio, il moto dei pannelli di scia è determinato dal campo di velocità locale.

I metodi a pannelli risultano poco adatti per la simulazione di fenomeni di interazione tra scia e corpi come quelli che caratterizzano le fasi di avviamento di un rotore in hovering, quindi per superare tale limite è possibile sfruttare il modello di *scia a vortoni* che sarà accuratamente descritto nei prossimi capitoli.

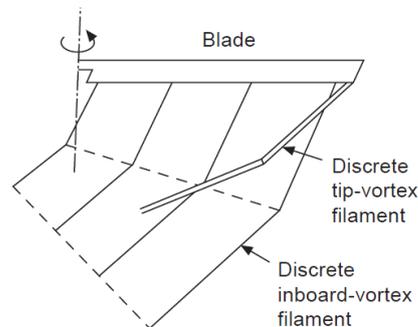


Figura 1.5: rappresentazione della scia vorticosa

1.3.3 Metodi ibridi

Una soluzione alternativa alle equazioni RANS su griglie ad alta risoluzione è costituita dai metodi ibridi che in linea di principio consentono di simulare in maniera sufficientemente accurata l'intero campo di moto prendendo gli aspetti positivi dei metodi a vortice e dei metodi CFD.

I metodi CFD basati su NS risolvono il campo di moto in prossimità delle pale, le informazioni sulla distribuzione di carico vengono sfruttate per calcolare l'evoluzione della scia con metodi a vortice [56]. In questo modo si sfrutta la capacità dei metodi CFD di fornire una descrizione più accurata del campo di moto e la capacità dei metodi a vortice lagrangiani di simulare l'evoluzione della scia nel campo lontano.

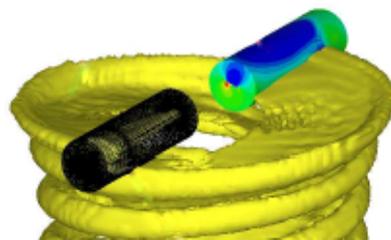


Figura 1.6: metodo ibrido

Capitolo 2

FLUSSO INCOMPRESSIBILE E NON VISCOSO

In questo capitolo vengono analizzate le ipotesi di flusso non viscoso e incompressibile alla base dei metodi a vortice. Il carattere non viscoso delle equazioni determina l'impossibilità di tener conto degli effetti di strato limite e quindi limita l'analisi a campi di moto caratterizzati da un elevato numero di Reynolds, per i quali si può ritenere la viscosità relegata nella sottile scia vorticoso del corpo aerodinamico. La scelta di modellare la scia con vortoni impone una modellazione del campo di velocità mediante la nota decomposizione di Helmholtz: una componente rotazionale per il campo legato alla vorticità e una potenziale principalmente usata per imporre le condizioni al contorno sulla frontiera del dominio. L'evoluzione del campo di vorticità è regolato dall'imposizione della condizione di Kutta al bordo di uscita.

2.1 Il dominio

Il dominio di interesse include tutto il flusso esterno al corpo portante studiato (fig. 2.1). Consideriamo un semplice sistema di coordinate cartesiane, il generico punto P al tempo t è individuato dal vettore posizione \underline{r} ,

$$\underline{r} = \underline{r}(x, y, z, t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (2.1)$$

Indicando con \underline{U} la velocità, vale la seguente relazione

$$\underline{U} = \underline{U}(x, y, z, t) = u(t)\mathbf{i} + v(t)\mathbf{j} + w(t)\mathbf{k} \quad (2.2)$$

con $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$ componenti scalari di \underline{U} .

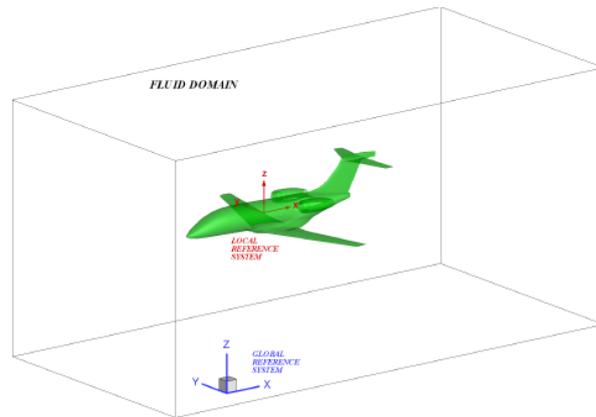


Figura 2.1: dominio

I corpi aerodinamici sono caratterizzati da un bordo di uscita aguzzo dal quale parte una scia che, in ipotesi di flusso incomprimibile e non viscoso, può ritenersi tanto sottile da essere schematizzata come una superficie vorticoso. In queste ipotesi le equazioni di Navier-Stokes (NS), che regolano l'evoluzione del fluido, possono essere notevolmente semplificate.

Un flusso è definito non viscoso, o ideale, se non presenta attrito, conduzione termica o diffusione; un flusso di tal genere è inesistente in natura ma

tale semplificazione è applicabile in quei casi in cui gli effetti della diffusione di massa, della viscosità e della conduzione termica sono trascurabili. Teoricamente il flusso può essere assunto non viscoso se il numero di Reynolds (Re) è molto alto, al limite infinito, in quanto tale numero caratteristico misura l'importanza relativa delle forze viscosive rispetto alle forze d'inerzia. Nei casi in cui il numero di Reynolds è molto elevato è possibile confinare gli effetti viscosi in una zona prossima alla superficie, detta *strato limite*, e considerare il flusso praticamente non viscoso all'esterno.

Il flusso si definisce incompressibile se la sua densità (ρ) è costante. Anche l'ipotesi di incompressibilità è una idealizzazione e tipicamente si ritiene che sia soddisfatta quando il numero di Mach della corrente è minore di $0.3 \div 0.4$.

Le equazioni che governano il moto di un sistema sono tre: conservazione della massa, conservazione dell'energia e bilancio della quantità di moto. Le tre equazioni costituiscono il noto sistema di equazioni di Navier-Stokes. Quando il fluido è considerato isoterma si ottiene un disaccoppiamento dell'equazione dell'energia dalle altre e questo comporta la possibilità di calcolare il campo di temperature indipendentemente dal campo di velocità e pressione. Per flussi non isoterma, l'accoppiamento tra campo di temperatura e campo di moto può presentarsi in diversi modi come ad esempio una variazione della viscosità.

La vorticità, indicata con $\underline{\omega}$, è pari al doppio della velocità angolare e vale la seguente importante relazione:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{U} \tag{2.3}$$

Quindi la vorticità è uguale al rotore del vettore velocità e per l'ipotesi di irrotazionalità del flusso nel dominio di interesse è possibile considerare $\nabla \times \underline{U} = 0$.

Un risultato molto importante è la relazione tra vorticità e circolazione di velocità. Consideriamo un punto P della superficie di un corpo immerso in una corrente, per il teorema di Stokes¹ possiamo scrivere,

$$\Gamma = - \oint_C \underline{U} \cdot d\underline{s} = - \int \int_S (\nabla \times \underline{U}) \cdot d\underline{S} \quad (2.4)$$

L'importanza di distinguere tra flusso rotazionale e irrotazionale sta nel fatto che i flussi irrotazionali sono molto più semplici da analizzare, ovviamente bisogna prestare molta attenzione all'applicabilità di tale ipotesi.

2.2 Teorema di Helmholtz

Helmoltz nel 1858 dimostrò che se un campo vettoriale rispetta determinati requisiti, può essere decomposto in due parti: una parte irrotazionale che può essere espressa come gradiente di una funzione potenziale scalare e una parte rotazionale che può essere espressa in termini del rotore di un potenziale vettoriale. Questo risultato del teorema di Helmholtz trova applicazione in diversi campi, dalla fluidodinamica all'elettromagnetismo.

Si dimostra che il teorema di Helmholtz può essere applicato ad un generico campo vettoriale \underline{A} dotato di derivate parziali del secondo ordine e tale che l'integrale di superficie o una generica derivata parziale sia zero all'infinito, di conseguenza tale campo vettoriale può essere definito come somma

¹Si consideri una superficie aperta S che poggia sulla curva chiusa C , sia \underline{A} un campo vettoriale, l'integrale di linea di \underline{A} su C è legato all'integrale di superficie di \underline{A} su S dal teorema di Stokes vale la relazione (2.4), quindi la circolazione intorno ad una curva C è uguale all'integrale della vorticità su una generica superficie che poggia sul circuito C .

$$\oint_C \underline{A} \cdot d\underline{s} = \int \int_S (\nabla \times \underline{A}) \cdot d\underline{S}$$

del gradiente di una funzione scalare e del rotore di una funzione vettoriale:

$$\underline{A} = \underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\Psi} \quad (2.5)$$

con

$$\phi(\underline{r}) = \int_V \frac{\underline{\nabla} \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r}'|} dV \quad (2.6)$$

$$\underline{\Psi}(\underline{r}) = \int_V \frac{\underline{\nabla} \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi|\underline{r}'|} dV \quad (2.7)$$

dove $1/(4\pi|\underline{r}'|)$ è la funzione di Green. Le equazioni (2.6) e (2.7) possono essere ricavate dall'identità di Green, $\underline{\Psi}$ è il potenziale vettoriale o funzione di corrente e ϕ è la funzione potenziale scalare. La funzione contenuta nell'integrale deve essere valutata in \underline{r}' mentre il vettore \underline{r}' rappresenta la distanza tra il punto di valutazione della funzione e il generico elemento di volume.

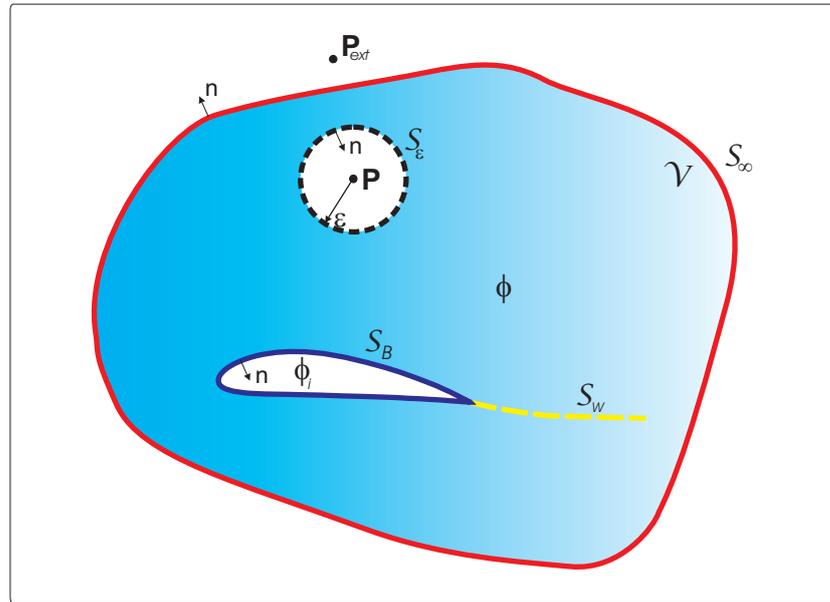


Figura 2.2: dominio considerato nella derivazione del teorema di Green

Per la funzione vettoriale \underline{A} vale il seguente risultato

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\Psi}) \rightarrow \nabla^2\phi = \underline{\nabla} \cdot \underline{A} \quad (2.8)$$

$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\Psi}) \rightarrow \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{\Psi}) - \nabla^2 \underline{\Psi} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \quad (2.9)$$

con

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{\Psi}) = 0 \quad (2.10)$$

$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla}\phi) = \underline{0} \quad (2.11)$$

Per la decomposizione di Helmholtz, la scelta di $\underline{\Psi}$ può essere arbitraria ma la scelta del vettore \underline{A} dipende da diverse considerazioni. Se il potenziale vettoriale $\underline{\Psi}$ e la funzione vettoriale \underline{A} sono solenoidali, allora le equazioni (2.8) e (2.9) diventano

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.12)$$

$$- \nabla^2 \underline{\Psi} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \quad (2.13)$$

Le equazioni (2.12) e (2.13) sono rispettivamente l'equazione di Laplace e l'equazione di Poisson che ammettono come soluzioni le funzioni (2.6) e (2.7). Il problema può quindi essere affrontato risolvendo un'equazione di Laplace per la componente irrotazionale e un'equazione di Poisson per la componente solenoidale.

2.3 Conservazione della massa ed evoluzione della vorticità

Consideriamo l'equazione di conservazione della massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{U}) = 0 \quad (2.14)$$

Per l'ipotesi di incomprimibilità, la densità $\rho(x, y, z, t)$ è costante,

$$\partial \rho / \partial t = 0 \quad (2.15)$$

$$\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{U}) = \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{U} \quad (2.16)$$

quindi l'equazione di conservazione della massa, in ipotesi di moto incomprimibile, può essere scritta nel modo seguente:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{U} = 0, \quad (2.17)$$

dove $\underline{\nabla} \cdot \underline{U}$ rappresenta, da un punto di vista fisico, la variazione percentuale nel tempo di un volume elementare di fluido.

L'equazione che regola l'evoluzione della vorticità è derivata dall'equazione di bilancio della quantità di moto,

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{U} = -\frac{\underline{\nabla} p}{\rho} + \nu \nabla^2 \underline{U} \quad (2.18)$$

dove ρ è la densità, p è la pressione e ν è la viscosità cinematica. Considerando le precedenti relazioni, l'equazione può essere così riscritta

$$\underline{\nabla} \times \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times (\underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{U}) = -\underline{\nabla} \times \left(\frac{\underline{\nabla} p}{\rho} \right) + \underline{\nabla} \times (\nu \nabla^2 \underline{U}) \quad (2.19)$$

e nel caso di sistemi di riferimento fissi, il primo termine a sinistra diventa

$$\underline{\nabla} \times \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \frac{\partial (\underline{\nabla} \times \underline{U})}{\partial t} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} \quad (2.20)$$

mentre per l'ultimo termine a destra vale la relazione

$$\underline{\nabla} \times (\nu \nabla^2 \underline{U}) = \nu \nabla^2 \underline{\omega} \quad (2.21)$$

L'identità $\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \cdot \underline{U} = 0$ e la densità costante determinano la scomparsa della pressione dall'equazione

$$\underline{\nabla} \times \left(\frac{\underline{\nabla} p}{\rho} \right) = \underline{0} \quad (2.22)$$

Il termine inerziale $\underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{U}$ può essere così riscritto

$$\underline{\nabla} \times (\underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{U}) = \underline{\nabla} \times \left(\frac{U^2}{2} \right) - \underline{U} \times \underline{\omega} \quad (2.23)$$

e $\underline{\nabla} \times (\underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{U})$ diventa

$$\underline{\nabla} \times (\underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{U}) = \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \left(\frac{U^2}{2} \right) - \underline{\nabla} \times (\underline{U} \times \underline{\omega}) \quad (2.24)$$

$$= \underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{\omega} - \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \underline{U} + \underline{\omega} (\underline{\nabla} \cdot \underline{U}) + \underline{U} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\omega}) \quad (2.25)$$

$$= \underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{\omega} - \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \underline{U} \quad (2.26)$$

L'equazione di evoluzione della vorticità è ottenuta sostituendo le relazioni su scritte nell'equazione di bilancio della quantità di moto,

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \underline{U} + \nu \nabla^2 \underline{\omega} \quad (2.27)$$

dove il primo termine a destra ($\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \underline{U}$) descrive la variazione della vorticità in presenza di gradienti di velocità nel dominio.

In assenza di viscosità ($Re \rightarrow \infty$), l'equazione precedente può essere semplificata

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \underline{U} \quad (2.28)$$

Per valori molto alti del numero di Reynolds, la diffusione della vorticità nel fluido avviene molto più lentamente della convezione della stessa, quindi la vorticità rimane confinata in regioni sottili, che includono gli strati limiti e la scia, e il flusso nelle restanti porzioni del dominio può essere considerato effettivamente irrotazionale.

L'equazione (2.29) descrive l'evoluzione di una linea materiale $\underline{\delta \ell}$ ed è chiaro quindi che le linee vorticosi si comportano come linee materiali in un flusso non viscoso. Ricordando che un tubo vorticoso è l'insieme delle linee vorticosi passanti per una curva chiusa e che la circolazione di velocità è indipendente dalla sezione trasversale alla quale viene calcolata (teorema di Helmholtz), è possibile affermare che, in assenza di viscosità, i tubi vorticosi si muovono come volumi materiali conservando la propria intensità.

$$\frac{D \underline{\delta \ell}}{Dt} = \underline{\delta \ell} \cdot \underline{\nabla} \underline{U} \quad (2.29)$$

2.4 Equazione di Laplace e di Poisson

Dato che la velocità \underline{U} e la vorticità $\underline{\omega}$ devono soddisfare le equazioni di conservazione della massa (2.17) e di evoluzione della vorticità (2.28) si può dimostrare che per il campo di velocità vale la decomposizione di Helmholtz e che è possibile calcolare le velocità usando le equazioni (2.12) e (2.13) invece delle (2.17) e (2.28).

Una volta definite la funzione potenziale scalare (ϕ) e la funzione potenziale vettoriale ($\underline{\Psi}$) è possibile esprimere il campo di velocità come combinazione della velocità legata al potenziale scalare (\underline{U}_ϕ) e della velocità legata al potenziale vettoriale (\underline{U}_Ψ)

$$\underline{U}_\Psi = \nabla \times \underline{\Psi} \quad (2.30)$$

$$\underline{U}_\phi = \nabla \phi \quad (2.31)$$

$$\underline{U}(\underline{r}, t) = \underline{U}_\phi(\underline{r}, t) + \underline{U}_\Psi(\underline{r}, t) = \nabla \phi + \nabla \times \underline{\Psi} \quad (2.32)$$

La \underline{U}_Ψ definita dalla relazione (2.30) rispetta automaticamente l'equazione di continuità (2.10) quindi possiamo affermare che la definizione della funzione $\underline{\Psi}$ è una conseguenza della conservazione della massa. Da un punto di vista fisico, le isolinee di $\underline{\Psi}$ rappresentano le linee di corrente e la differenza tra i valori assunti dalla funzione $\underline{\Psi}$ in due punti rappresenta la portata volumetrica attraverso un qualsiasi arco di curva congiungente i due punti.

La irrotazionalità del flusso ($\nabla \times \underline{U} = \underline{0}$) è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un potenziale scalare di velocità $\phi(x, y, z, t)$ tale che

$$\underline{U}_\phi = \nabla \phi \quad (2.33)$$

Il potenziale di velocità è simile alla funzione di corrente perchè le derivate di ϕ definiscono le componenti di velocità ma esistono differenze importanti tra ϕ e $\underline{\Psi}$. Primo, le derivate parziali di ϕ calcolate lungo determinate

direzioni forniscono le componenti della velocità in tali direzioni mentre le derivate parziali di $\underline{\Psi}$ forniscono le componenti della velocità nelle direzioni ortogonali; secondo, il potenziale scalare di velocità può essere definito solo per campi di moto irrotazionali, a differenza della funzione di corrente che può essere sempre definita.

Sostituendo la relazione (2.32) nella legge di conservazione della massa (2.17), l'equazione si semplifica come segue:

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\Psi}) = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla}\phi) = \nabla^2\phi = 0 \quad (2.34)$$

L'equazione di Laplace è una conseguenza della legge di conservazione della massa nelle ipotesi di flusso irrotazionale e incomprimibile. Da notare che l'equazione di Laplace è un'equazione differenziale lineare di carattere ellittico quindi la soluzione di tale equazione si riduce ad un problema alle condizioni al contorno.

Ricordando che il campo di vorticità $\underline{\omega}(r, t)$ è definito come il rotore della velocità:

$$\underline{\nabla} \times \underline{U} = \underline{\omega} \quad (2.35)$$

è possibile usare $\underline{\omega}$ nella relazione (2.13), di conseguenza l'equazione di Poisson lega il potenziale vettoriale alla vorticità.

Le equazioni da risolvere sono in definitiva:

$$\nabla^2 \underline{\phi} = 0 \quad (2.36)$$

$$\nabla^2 \underline{\Psi} = -\underline{\omega} \quad (2.37)$$

La linearità dell'equazione di Laplace è un aspetto estremamente importante perchè la soluzione può essere ottenuta come sovrapposizione di soluzioni elementari, come accade nei metodi a pannelli. Tuttavia bisogna fare delle precisazioni sulla scia e sulla linearità dell'equazione di Laplace.

Nei metodi a pannelli la scia è considerata parte della frontiera del dominio e quindi la corretta determinazione della sua forma e della distribuzione di vorticità gioca un ruolo fondamentale nella valutazione della funzione potenziale e conseguentemente del campo di velocità.

2.5 Legge di Biot-Savart

La velocità indotta da un distribuzione di vortici (fig. 2.3) è sia un esempio di soluzione dell'equazione di Poisson sia un campo di moto elementare che verrà sfruttato in seguito. La soluzione dell'equazione di Poisson $\underline{\omega} = -\nabla^2 \underline{\Psi}$ può essere ricavata usando il teorema di Green,

$$\underline{\Psi} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\underline{\omega}}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_1|} dV \quad (2.38)$$

dove $\underline{\Psi}$ è valutata in un punto P individuato dal vettore posizione \underline{r}_0 mentre \underline{r}_1 è la posizione del generico volume elementare dV . Le equazioni (2.38) e la (2.7) sono equivalenti. Chiaramente la velocità è data dal rotore di $\underline{\Psi}$

$$\underline{U}_\Psi = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{\underline{\omega}}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_1|} dV \quad (2.39)$$

Consideriamo un elemento infinitesimo del filamento vorticoso $\underline{\omega}$, prendiamo una sezione ds ortogonale a $\underline{\omega}$ e una direzione $d\ell$ parallela ad $\underline{\omega}$

$$d\ell = \frac{d\ell}{\omega} \underline{\omega}, \quad (2.40)$$

dato che per la circolazione Γ e per il dV valgono le seguenti relazioni

$$\Gamma = \omega dS \quad (2.41)$$

$$dV = dS dl \quad (2.42)$$

allora l'integrando diventa

$$\nabla \times \frac{\underline{\omega}}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_1|} = \nabla \times \Gamma \frac{d\ell}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_1|} = \Gamma \frac{d\ell \times (\underline{r}_0 - \underline{r}_1)}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_1|^3} \quad (2.43)$$

Sostituendo le equazioni precedenti nella (2.39) otteniamo l'equazione di Biot-Savart che può essere così riscritta

$$\underline{U}_\Psi = \frac{1}{4\pi} \int_V \Gamma \frac{d\ell \times (\underline{r}_0 - \underline{r}_1)}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_1|^3} dV \quad (2.44)$$

o in diversa forma

$$d\underline{U}_\Psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\ell \times (\underline{r}_0 - \underline{r}_1)}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_1|^3} \quad (2.45)$$

Nel caso di distribuzione volumetrica di vorticità è possibile manipolare l'equazione (2.39) per ottenere il seguente risultato

$$\underline{U}_\Psi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\underline{\omega} \times (\underline{r}_0 - \underline{r}_1)}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_1|^3} dV \quad (2.46)$$

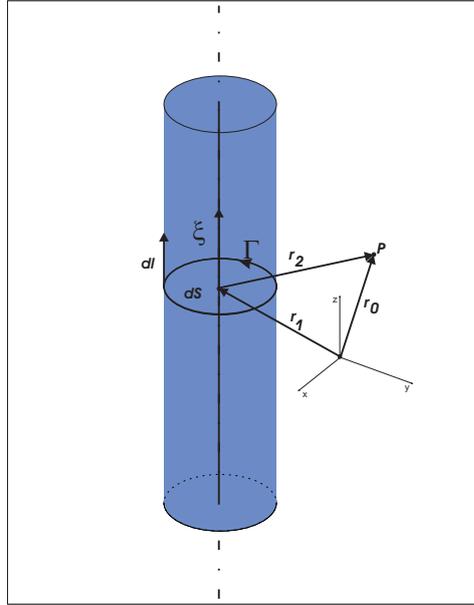


Figura 2.3: velocità indotta da una distribuzione di vortici

2.5.1 La velocità indotta da un segmento vorticoso

Helmholtz fu il primo a sfruttare il concetto di filamento vorticoso per analizzare il campo di moto non viscoso e incomprimibile, stabilendo principi di base noti come teoremi di Helmholtz. Primo, l'intensità di un filamento vorticoso è costante; secondo, un filamento vorticoso non può avere inizio e fine, deve quindi essere una linea chiusa o estendersi fino alla frontiera del dominio.

La derivazione del campo di velocità indotto da un filamento vorticoso rettilineo $d\ell$ si basa sulla legge di Biot-Savart. Dato che una linea vorticososa deve estendersi all'infinito, il contributo di un segmento vorticoso non è altro che quello di una sezione di una linea vorticososa illimitata. La velocità indotta da tale segmento vorticoso avrà solo componente tangenziale perchè la componente del vettore velocità nella direzione del filamento vorticoso è nulla.

Siano \underline{r}_1 e \underline{r}_2 le posizioni degli estremi del segmento vorticoso, il vettore congiungente tali punti è

$$\underline{r}_0 = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \quad (2.47)$$

Quindi, la distanza d e i coseni degli angoli β_1 e β_2 sono

$$d = \frac{|\underline{r}_1 \times \underline{r}_2|}{|\underline{r}_0|} \quad (2.48)$$

$$\cos \beta_1 = \frac{\underline{r}_0 \cdot \underline{r}_1}{|\underline{r}_0| |\underline{r}_1|} \quad (2.49)$$

$$\cos \beta_2 = \frac{\underline{r}_0 \cdot \underline{r}_2}{|\underline{r}_0| |\underline{r}_2|} \quad (2.50)$$

La velocità $\underline{U}_{\Psi_{1,2}}$ ha direzione normale al piano definito dal punto P e dagli estremi del segmento vorticoso 1, 2 mentre il versore è dato da

$$\frac{\underline{r}_1 \times \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \times \underline{r}_2|} \quad (2.51)$$

Sostituendo tali quantità, la velocità indotta è

$$\underline{U}_{\Psi_{1,2}} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\underline{r}_1 \times \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \times \underline{r}_2|} \underline{r}_0 \cdot \left(\frac{\underline{r}_1}{r_1} - \frac{\underline{r}_2}{r_2} \right) \quad (2.52)$$

Le superfici portanti o la scia vorticoso possono essere schematizzate utilizzando una distribuzione di segmenti di vortice di intensità costante.

2.5.2 Vortex Core

Il flusso interno ad un vortice reale è mostrato in figura 2.4a in cui è possibile individuare l'andamento circolare delle linee di corrente intorno al suo centro.

Nella zona prossima al centro del vortice la velocità tangenziale tende a zero per effetto della viscosità mentre nella stessa zona, in ambito numerico, le velocità calcolate con il modello di flusso potenziale tendono all'infinito. In ipotesi di flusso non viscoso, per modellare correttamente il campo di velocità in prossimità del centro del vortice è necessario definire una *vortex core function* che ha validità solo in un intorno di raggio r_c del centro del vortice, definito *vortex core*. In questo modo la velocità indotta da un vortice in un campo non viscoso è definita dalla legge di Biot-Savart (2.44) (2.52) per distanze maggiori di r_c e dalla *vortex core function* per distanze minori di r_c . La combinazione della legge di Biot-Savart e della *vortex core function* definisce il modello di *vortex core* utilizzato.

Il modello di *vortex core* più semplice è quello di Rankine che assume un decadimento lineare della velocità indotta all'interno del *vortex core* e può essere sintetizzato dalla seguente relazione

$$q_\theta = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r}{r_c^2} & r \leq r_c \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} & r \geq r_c \end{cases} \quad (2.53)$$

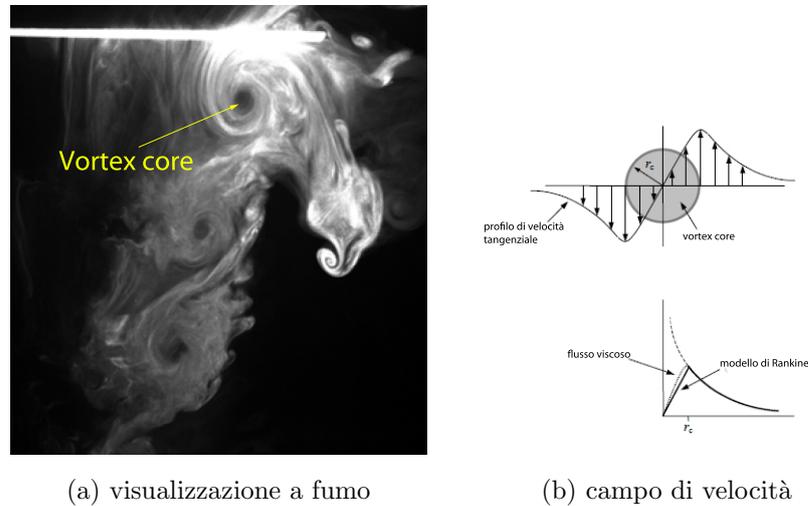


Figura 2.4: vortex core

2.6 Condizioni al contorno

Il campo di moto intorno ai corpi è inevitabilmente legato alla loro configurazione geometrica quindi oggetti diversi saranno interessati da campi di velocità diversi ma, nelle ipotesi di flusso incomprimibile e non viscoso, sempre definiti dalle equazioni $\nabla^2\phi = 0$ e $\nabla^2\Psi = -\underline{\omega}$, sono le diverse condizioni al contorno a determinare le diverse soluzioni.

Nel caso di problemi non stazionari per ottenere soluzioni esatte per ogni istante di tempo è necessario formulare correttamente le condizioni al contorno non stazionarie. La natura instazionaria delle condizioni al contorno può essere legata alla variazione nel tempo del flusso asintotico uniforme che investe la corrente, alla posizione o forma delle superfici dei corpi, alla forma delle superfici deformabili, come la scia o superfici di separazione tra due differenti fluidi, è quindi necessario un continuo aggiornamento delle condizioni al contorno.

Le condizioni al contorno non solo devono essere specificate su ogni superficie solida e all'infinito ma devono anche essere aggiornate nel tempo. Nel

caso specifico di problemi aeronautici, per imporre la regolarità del flusso al bordo di uscita è necessario imporre la condizione di Kutta.

2.6.1 Condizioni al contorno a parete

Gli oggetti hanno generalmente superfici solide impermeabili quindi il flusso non può e non deve attraversarle. Per flussi viscosi la velocità è nulla a parete per dell'attrito determinando una condizione di *no-slip* mentre per flussi non viscosi non è possibile imporre tale condizione e la velocità a parete deve assumere un valore finito e in più deve essere localmente parallela alla superficie per rispettarne l'impermeabilità; solo nel caso particolare di superfici traspiranti è possibile avere un vettore velocità non tangente alla superficie del corpo.

In questo lavoro di tesi si fa l'ipotesi di superfici impermeabili quindi il campo di velocità deve essere tale da rispettare la condizione di tangenza del fluido a parete

$$\underline{U} \cdot \underline{n} = (\underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla} \times \underline{\Psi}) \cdot \underline{n} = 0 \quad (2.54)$$

2.7 Condizione di Kutta sul bordo d'uscita dell'ala

La forza netta prodotta dai corpi aerodinamici durante il moto è legata alla distribuzione di pressione sulla superficie. Il moto intorno al bordo d'uscita aguzzo è impedito dal fatto che sarebbero necessarie pressioni infinite per determinare una curvatura delle particelle di fluido in tale zona e di conseguenza il fluido abbandona il corpo formando una scia vorticoso.

Dato che abbiamo fatto ipotesi di flusso non viscoso e irrotazionale, per garantire una soluzione che rispetti la fisica del problema è necessario introdurre una condizione al bordo d'uscita, la condizione di Kutta, grazie alla quale si impone che il flusso abbandoni il corpo in modo dolce e con velocità finita.

Nel caso di corpi aerodinamici (affusolati), la capacità di gestire tale condizione di Kutta, e le sue fluttuazioni, ricopre un ruolo fondamentale e questo comporta la necessità di aggiornare nel tempo la condizione al bordo di uscita. Inoltre, dato che l'angolo del bordo d'uscita è piccolo ma finito, la componente normale della velocità al bordo d'uscita sul dorso e sul ventre deve annullarsi e questo è possibile solo se la differenza di pressione è nulla:

$$\Delta p_{T.E.} = 0 \quad (2.55)$$

La condizione di Kutta consiste quindi nell'imporre al bordo di uscita un salto di pressione nullo o, in maniera equivalente, l'annullamento della componente di vorticità parallela al bordo di uscita ($\gamma_{T.E.}$)

$$\gamma_{T.E.} = 0 \quad (2.56)$$

Per imporre il rilascio di vorticità al bordo di uscita in direzione della corrente locale viene utilizzata una versione linearizzata dell'equazione di continuità della pressione

$$\phi_{upper} - \phi_{lower} = \Delta\phi_{wake} \quad (2.57)$$

dove il pedice *upper* e *lower* si riferiscono alla parte superiore (dorso) e inferiore (ventre) del bordo di uscita dell'ala. L'effetto dell'imposizione della condizione di Kutta al bordo di uscita è mostrato nella figura 2.5.

Per flussi instazionari è necessario applicare una condizione di Kutta variabile nel tempo. Questa condizione aggiuntiva richiede che ogni aumento

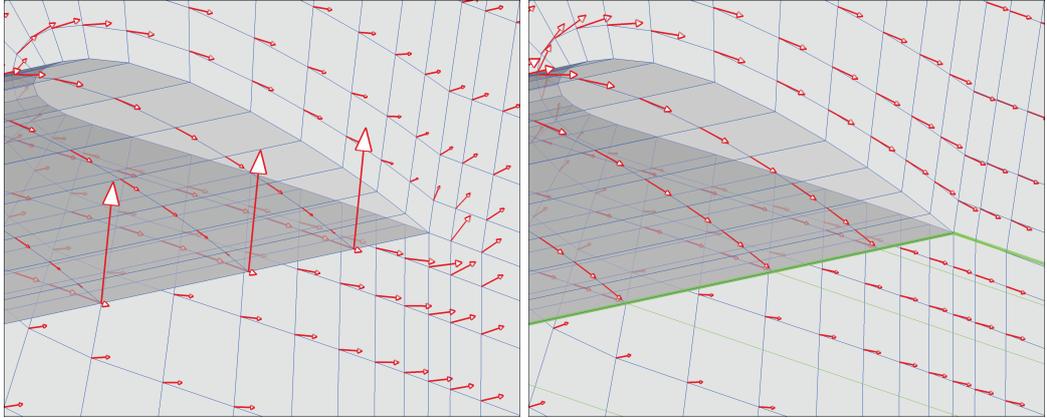


Figura 2.5: il campo di moto al bordo di uscita senza (sinistra) e con (destra) l'imposizione della condizione di Kutta.

dell'intensità dei vortici aderenti deve essere bilanciata da un aumento equivalente della vorticità nella scia che deve essere orientata in direzione parallela al bordo d'uscita. Formalmente, viene imposto che la variazione nel tempo di vorticità sull'ala e nella scia deve avere somma :

$$\left[\frac{d\Gamma_{span}}{dt} \right]_{wing} = - \left[\frac{d\Gamma_{span}}{dt} \right]_{wake} \quad (2.58)$$

dove Γ rappresenta l'intensità della circolazione dell'ala e della scia. Quindi la vorticità rilasciata nella scia deve essere sempre uguale ed opposta alla vorticità sull'ala.

2.8 Equazione di Bernoulli instazionaria

Il campo di pressione può essere valutato a partire dal campo di velocità mediante l'equazione di Bernoulli. L'equazione di Bernoulli è una delle più adoperate in fluidodinamica ed è valida in ipotesi di flusso privo di attrito e trasferimento di calore. Le ipotesi di flusso potenziale e incomprimibile sfruttate in questo lavoro di tesi permettono l'utilizzo dell'equazione di Bernoulli per la determinazione del campo di pressione. Di seguito viene analizzata la

formulazione instazionaria di tale equazione, derivata a partire dall'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \underline{U} = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (2.59)$$

Il campo di moto è irrotazionale in ogni punto dello spazio esterno alla regione di scia quindi l'equazione diventa:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\underline{U}|^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (2.60)$$

usando la decomposizione di Helmholtz otteniamo

$$\frac{\partial(\nabla\phi) + \partial(\nabla \times \underline{\Psi})}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\nabla\phi + \nabla \times \underline{\Psi}|^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (2.61)$$

da cui

$$\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla \times \underline{\Psi})}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\nabla\phi + \nabla \times \underline{\Psi}|^2 + \frac{\nabla p}{\rho} = 0 \quad (2.62)$$

Integrando l'equazione di Bernoulli lungo una linea di corrente da un punto di superficie x_1 ad un punto all'infinito, dove la velocità è zero, dato che il corpo si muove in assenza di vento, quindi $p = p_\infty$, otteniamo:

$$\int_\infty^{p_{x_1}} \frac{\partial(\nabla \times \underline{\Psi})}{\partial t} d\underline{C} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi + \nabla \times \underline{\Psi}|_{x_1}^2 \right) = \frac{p_\infty - p_{x_1}}{\rho} \quad (2.63)$$

Il termine $\partial\phi/\partial t$, definito in un riferimento Euleriano può essere calcolato a partire da un riferimento Lagrangiano definito sul corpo:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{D\phi}{Dt} - \underline{U} \cdot \nabla\phi \quad (2.64)$$

L'equazione di Bernoulli nel caso non stazionario allora diventa:

$$\int_\infty^{p_{x_1}} \frac{\partial(\nabla \times \underline{\Psi})}{\partial t} d\underline{C} + \frac{D\phi}{Dt} - \underline{U} \cdot \nabla\phi + \frac{1}{2} |\nabla\phi + \nabla \times \underline{\Psi}|_{x_1}^2 = \frac{p_\infty - p_{x_1}}{\rho} \quad (2.65)$$

Il termine instazionario è difficile da utilizzare se espresso nella forma:

$$\int_\infty^{p_{x_1}} \frac{\partial(\nabla \times \underline{\Psi})}{\partial t} \cdot d\underline{C} \quad (2.66)$$

Quindi considerando il contributo della scia vorticoso come un contributo legato ad una distribuzione superficiale di doppiette, è possibile ottenere:

$$\int_{\infty}^{p_{x_1}} \frac{\partial(\underline{\nabla} \times \underline{\Psi})}{\partial t} \cdot d\underline{C} = \int_{\infty}^{p_{x_1}} \frac{\partial(\underline{\nabla}\varphi)}{\partial t} |_{wake} \cdot d\underline{C} \quad (2.67)$$

Integrando l'espressione per il potenziale φ , la relazione si semplifica:

$$\int_{\infty}^{p_{x_1}} \frac{\partial\varphi}{\partial t} |_{wake} \cdot d\underline{C} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{D\varphi}{Dt} - \underline{U} \cdot \underline{\nabla}\varphi \quad (2.68)$$

dove, $\underline{\nabla}\varphi$ è la velocità dovuta alla scia. L'equazione di Bernoulli instazionaria allora assume la sua forma definitiva:

$$\frac{D\varphi}{Dt} + \frac{D\phi}{Dt} - \underline{U} \cdot \underline{\nabla}(\phi + \varphi) + \frac{1}{2} |\underline{\nabla}\phi + \underline{\nabla}\varphi|_{x_1}^2 = \frac{p_{\infty} - p_{x_1}}{\rho} \quad (2.69)$$

2.9 Calcolo di forze e momenti

Le forze e i momenti aerodinamici che agiscono sul corpo sono determinate dalla distribuzione superficiale di pressione e di carico tangenziale. La pressione ageisce nella direzione ortogonale alla superficie mentre la seconda ageisce tangenzialmente alla superficie ed è legata all'effetto dell'attrito.

L'effetto complessivo delle pressioni e degli sforzi tangenziali sono una forza aerodinamica risultante \underline{F} e un momento risultante \underline{M} . Considerando l'ipotesi di flusso non viscoso, la forza e il momento possono essere calcolati una volta determinato il campo di pressione con l'equazione di Bernoulli:

$$\underline{F}(t) = \int_{S(t)} (p_{\infty} - p_{x_1}(t)) \underline{n} \, dS(t) \quad (2.70)$$

$$\underline{M}(t) = \int_{S(t)} \underline{r} \times [(p_{\infty} - p_{x_1}(t)) \underline{n}] \, dS(t) \quad (2.71)$$

dove \underline{r} deve essere espresso nell'opportuno sistema di riferimento, in aeronautica è pratica comune scegliere il centro aerodinamico dell'ala come polo per il calcolo dei momenti.

La forza risultante può essere divisa in due componenti: portanza (lift) \underline{L} e resistenza (drag) \underline{D} . La prima è definita come componente di \underline{F} perpendicolare alla direzione della corrente asintotica, la seconda è definita come la componente di \underline{F} parallela al vento relativo.

L'ipotesi di flusso non viscoso determina un'errata valutazione della resistenza totale dei corpi in quanto viene considerata solo la resistenza indotta dalla portanza trascurando la resistenza d'attrito e la resistenza di forma, legata a fenomeni di separazione del flusso.

Capitolo 3

METODI A PANNELLI

Nel precedente capitolo sono state formulate le equazioni fondamentali della fluidodinamica nelle ipotesi di flusso incomprimibile e non viscoso, ora l'attenzione viene posta sulla teoria e sulla procedura numerica usata per risolvere il campo di moto nelle suddette ipotesi.

3.1 Formulazione del metodo a pannelli

Le applicazioni ingegneristiche generalmente richiedono la soluzione del campo di moto in un determinato dominio contenente un corpo solido e per il quale sono fornite opportune condizioni al contorno. Consideriamo il potenziale scalare governato dall'equazione di Laplace:

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{3.1}$$

Il problema matematico definito dall'equazione di Laplace con le condizioni al contorno è schematicamente descritto dalla figura 3.1. L'equazione di Laplace deve essere risolta per un corpo arbitrario con superficie S_B , racchiuso in un volume V e con una frontiera esterna S_∞ , le normali alle superfici

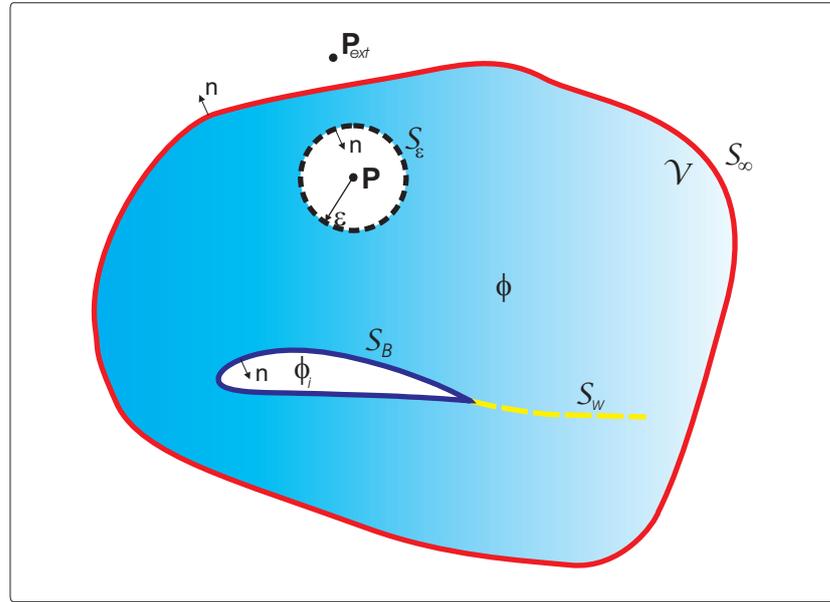


Figura 3.1: teorema di Green

devono essere rivolte verso l'esterno della regione di interesse V . All'interno del dominio V è possibile ottenere la soluzione dell'equazione di Laplace grazie alla terza identità di Green, una diretta conseguenza del teorema della divergenza:

$$\iint_S \underline{A} \cdot \underline{n} dS = \iiint_V \underline{\nabla} \cdot \underline{A} dV \quad (3.2)$$

In particolare, se si considera il vettore

$$\underline{A} = \phi_1 \underline{\nabla} \phi_2 - \phi_2 \underline{\nabla} \phi_1 \quad (3.3)$$

con ϕ_1 e ϕ_2 funzioni scalari e si applica il teorema della divergenza al vettore \underline{A} , si ottiene:

$$\iint_S (\phi_1 \underline{\nabla} \phi_2 - \phi_2 \underline{\nabla} \phi_1) \cdot \underline{n} dS = \iiint_V (\phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1) dV \quad (3.4)$$

L'equazione (3.4) è nota come seconda identità di Green, da notare che l'integrale di superficie è esteso a tutta la frontiera del dominio costituita dalla

superficie del corpo (S_B), dalla superficie esterna S_∞ e dalla scia S_W :

$$S = S_B + S_W + S_\infty \quad (3.5)$$

Imponendo

$$\phi_1 = \frac{1}{r} \quad (3.6)$$

$$\phi_2 = \phi \quad (3.7)$$

con r distanza dalla frontiera del generico punto $P(x, y, z, t)$ e ϕ potenziale scalare che soddisfa l'equazione di Laplace, la seconda identità di Green diventa:

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \underline{\nabla} \phi - \phi \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \underline{n} dS = \iiint_V \left(\frac{1}{r} \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \frac{1}{r} \right) dV \quad (3.8)$$

Quando il punto P è all'esterno di V (P_{ext}), l'equazione (3.8) diventa

$$P \notin V \implies \iint_S \left(\frac{1}{r} \underline{\nabla} \phi - \phi \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \underline{n} dS = 0 \quad (3.9)$$

Quando P è interno al dominio V deve essere escluso dalla regione di integrazione e questo viene effettuato racchiudendolo in una piccola sfera di raggio ϵ , in questo modo le funzioni ϕ_1 e ϕ_2 soddisfano l'equazione di Laplace nel dominio V privato dell'intorno sferico di P . L'equazione (3.8) diventa

$$P \in V \implies \iint_{S+S_\epsilon} \left(\frac{1}{r} \underline{\nabla} \phi - \phi \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \underline{n} dS = 0 \quad (3.10)$$

Introducendo un sistema di coordinate sferiche in P è possibile ottenere l'integrale sulla superficie della sfera; considerando la direzione del vettore normale alla superficie S_ϵ , l'equazione (3.10) diventa

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \underline{\nabla} \phi - \phi \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \underline{n} dS - \iint_{S_\epsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r^2} \right) dS = 0 \quad (3.11)$$

L'integrazione sulla superficie della regione sferica diventa

$$\iint_{S_\epsilon} \left(\frac{\phi}{r^2} \right) dS = 4\pi\phi(P) \quad (3.12)$$

Infine, la (3.11) può essere riscritta

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \underline{\nabla} \phi - \phi \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \underline{n} dS \quad (3.13)$$

L'equazione (3.13) è la terza identità di Green che fornisce il valore di $\phi(P)$ in ogni punto all'interno del volume V in termini dei valori di ϕ e $\partial\phi/\partial n$ sulla frontiera S . Quando si è interessati al flusso interno alla frontiera S_B si deve calcolare il *potenziale interno* ϕ_i , il punto P interno alla regione V è esterno alla zona delimitata da S_B quindi applicando la (3.9) risulta:

$$0 = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left(\frac{1}{r} \underline{\nabla} \phi_i - \phi_i \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \underline{n} dS \quad (3.14)$$

Sommando le equazioni (3.13) e (3.14), otteniamo la relazione che include gli effetti del potenziale interno:

$$\begin{aligned} \phi(P) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left[\frac{1}{r} \underline{\nabla} (\phi - \phi_i) - (\phi - \phi_i) \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right] \cdot \underline{n} dS + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{S_W + S_\infty} \left(\frac{1}{r} \underline{\nabla} \phi - \phi \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \underline{n} dS \end{aligned} \quad (3.15)$$

Il contributo dell'integrale esteso ad S_∞ dell'equazione (3.15) può essere definito come

$$\phi_\infty(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\infty} \left(\frac{1}{r} \underline{\nabla} \phi - \phi \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \underline{n} dS \quad (3.16)$$

Dato che la scia viene modellata come una superficie S_W , il termine $\partial\phi/\partial n$ è continuo attraverso di essa e di conseguenza la (3.15) diventa

$$\phi(P) = \phi_\infty(P) + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left[\frac{1}{r} \underline{\nabla} (\phi - \phi_i) - (\phi - \phi_i) \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right] \cdot \underline{n} dS +$$

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_W} (\phi_U - \phi_L) \underline{n} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{r} dS \quad (3.17)$$

Quindi la soluzione del campo di velocità si riduce alla determinazione del valore di ϕ e $\partial\phi/\partial n$ sulla frontiera.

Quando il punto P giace sulla superficie del corpo (S_B), il potenziale $\phi(P)$ è singolare quindi per l'applicazione della identità di Green è necessario escludere tale punto dal dominio di integrazione racchiudendolo in una semisfera, in questo modo l'equazione (3.17) diventa

$$\begin{aligned} \phi(P \in S_b) = & \phi_\infty(P) + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \frac{1}{r} \underline{n} \cdot \underline{\nabla} (\phi - \phi_i) dS + \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{B-P}} (\phi - \phi_i) \underline{n} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{r} dS \pm \frac{1}{2} (\phi - \phi_i)_p + \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_W} (\phi_U - \phi_L) \underline{n} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{r} dS \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.1.1 Condizioni al contorno

La soluzione dell'equazione (3.18) deve soddisfare un certo numero di condizioni al contorno, fissate sulle superfici solide e sulla scia libera. In particolare sulla superficie S_B deve essere rispettata la condizione alla Neumann:

$$\underline{n} \cdot \underline{\nabla} \phi = -U_{n_T} - U_{n_R} \quad (3.19)$$

dove U_{n_R} è la componente normale della velocità sulla superficie del corpo, e U_{n_T} è la componente normale della velocità dovuta ad eventuale traspirazione attraverso superfici non impermeabili. L'imposizione di una condizione al contorno sulla superficie S_W non è necessaria in quanto il potenziale è determinato dall'applicazione della condizione di Kutta al bordo di uscita,

infatti la presenza della scia non introduce incognite nel problema in quanto la variazione del potenziale nella scia è legata alla variazione del potenziale sul corpo e di conseguenza il contributo dell'integrale esteso a S_W può considerarsi noto.

La forma della scia deve essere calcolata imponendo in ogni suo punto una condizione di tangenza al vettore velocità, relazione (3.20), in quanto essa non essendo una superficie solida non può essere soggetta a carichi ma deve allinearsi alla corrente locale.

$$\underline{U} \cdot \underline{n}|_{S_W} = 0 \quad (3.20)$$

La determinazione della forma corretta della scia dipende dalla determinazione del campo di velocità \underline{U} che è proprio l'incognita del problema, questa *non-linearità* può essere superata o utilizzando una scia fissa, indipendente dal campo di moto, o con tecniche iterative.

3.1.2 Calcolo di velocità e forze

La velocità totale in ogni punto del dominio può essere calcolata, una volta nota la distribuzione di singolarità, sfruttando la seguente equazione

$$\begin{aligned} \underline{U}(P) = & \underline{U}_\infty(P) - \iint_{S_B} \mu \underline{\nabla} \left(\underline{n} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) dS + \\ & + \iint_{S_B} \sigma \underline{\nabla} \frac{1}{r} dS - \iint_{S_W} \mu^w \underline{\nabla} \left(\underline{n} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) dS \end{aligned} \quad (3.21)$$

La relazione appena scritta è alla base di molte soluzioni numeriche ed è stata ottenuta considerando il gradiente del potenziale scalare totale dell'equazione (3.17).

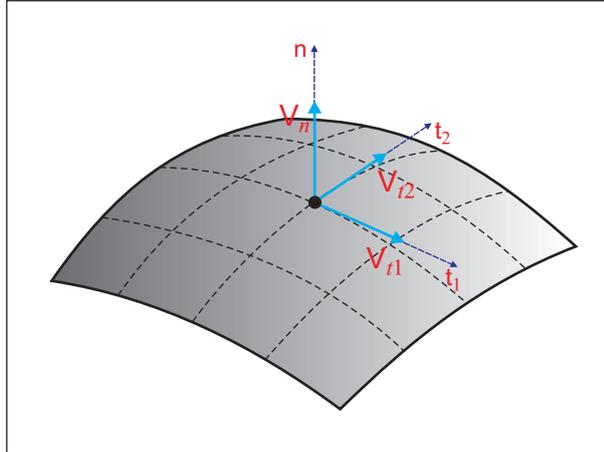


Figura 3.2: Sistema di riferimento locale del pannello per il calcolo delle componenti di velocità normale e tangenziale

Quando il punto P giace sulla frontiera è necessario sfruttare la relazione (3.18) e usare la seguente equazione

$$\begin{aligned} \underline{U}(P \in body) = & \underline{U}_\infty(P) - 2 \iint_{S_{B-P}} \mu \underline{\nabla} \left(\underline{n} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) dS + \\ & + 2 \iint_{S_B} \sigma \underline{\nabla} \frac{1}{r} dS - 2 \iint_{S_w} \mu^w \underline{\nabla} \left(\underline{n} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{r} \right) dS \end{aligned} \quad (3.22)$$

Il calcolo della velocità può essere effettuato considerando il gradiente del potenziale in un sistema di riferimento locale centrato nel punto della superficie considerato, come mostrato nella figura 3.2.

Una volta determinata la distribuzione di velocità e valutato il termine $\partial\phi/\partial t$ sulla superficie è possibile calcolare la distribuzione di pressione con il teorema di Bernoulli.

3.2 Metodi a pannelli non stazionari

Il metodo per la soluzione di un campo di moto incomprimibile e irrotazionale illustrato fino a questo momento non tiene conto della natura instazionaria del problema. La non stazionarietà viene introdotta attraverso le condizioni al contorno e l'utilizzo della formulazione instazionaria dell'equazione di Bernoulli.

La scelta del sistema di riferimento è molto importante per la formulazione di un problema non stazionario. Per imporre correttamente le condizioni al contorno sulle superfici solide si sceglie generalmente un sistema di riferimento solidale all'oggetto $(0, x, y, z)$ e un sistema di riferimento globale fisso nello spazio (O, X, Y, Z) , ipotizzando nota la legge di moto del corpo, la condizione di impermeabilità viene iposta nel modo seguente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = (\underline{U}_\infty - \underline{U}_r - \underline{\Omega} \times \underline{r}) \cdot \underline{n} \quad (3.23)$$

dove $\underline{r}(x, y, z)$, \underline{U}_∞ , \underline{U}_r e $\underline{\Omega}$ sono rispettivamente la posizione del generico punto nel sistema di riferimento body, la velocità del sistema di riferimento body nel riferimento globale, il moto relativo della superficie in presenza di deformazioni e la velocità angolare.

3.2.1 Modello di scia instazionaria a pannelli

La scia, valutata in modo iterativo, viene rilasciata a valle della linea di separazione nel momento in cui il corpo si sposta dalla posizione occupata inizialmente nel sistema di riferimento globale, la linea di separazione coincide generalmente con il bordo di uscita.

Durante ogni time step, l'ala si sposta secondo la propria traiettoria e ogni pannello di superficie al bordo di uscita rilascia un pannello di scia con intensità corrispondente alla propria circolazione nel precedente istante di

tempo e ottenuta con l'imposizione della condizione di Kutta; è come se il bordo di uscita lasciasse una traccia durante il passaggio o equivalentemente è come se il bordo di uscita fosse trascinato dal flusso verso valle (fig. 3.3). In ogni time step viene aggiunta una nuova fila di pannelli a valle della linea di separazione e quelli già presenti vengono trasportati a valle secondo la velocità locale nel riferimento inerziale.

Al primo time step non esistono pannelli di scia ma solo i pannelli superficiali del corpo che modellano il sistema di vortici aderenti, gli elementi del bordo di uscita modellano il vortice di avviamento che coincide con la linea di separazione.

Al secondo time step l'ala si sposta lungo la propria traiettoria e i pannelli del bordo di uscita rilasciano un pannello di scia. Il primo pannello di scia, che modella la vorticità rilasciata nel dominio dal movimento dell'ala, impone un ben definito salto del potenziale necessario per far rispettare la condizione di Kutta, condizione al contorno utilizzata per determinare l'intensità delle doppie della prima fila di pannelli. Quindi ogni singolo pannello di scia modella un vortice di intensità uguale alla circolazione ottenuta dall'imposizione della condizione di Kutta al bordo di uscita.

Durante il terzo time step, sono quindi presenti due file di pannelli, quella più recente e prossima al bordo di uscita, dove viene imposta la condizione di Kutta, è immessa nel dominio dai pannelli del bordo di uscita al time step precedente mentre la seconda fila è nota in quanto risultato della convezione a valle della fila di pannelli per i quali si è imposta e risolta la condizione di Kutta al time step precedente.

In questo modo in ogni time step, sono note le intensità di tutti i pannelli di scia fatta eccezione per quelli adiacenti alla linea di separazione. Questo processo iterativo permette di simulare fenomeni instazionari come il *roll up*

di estremità.

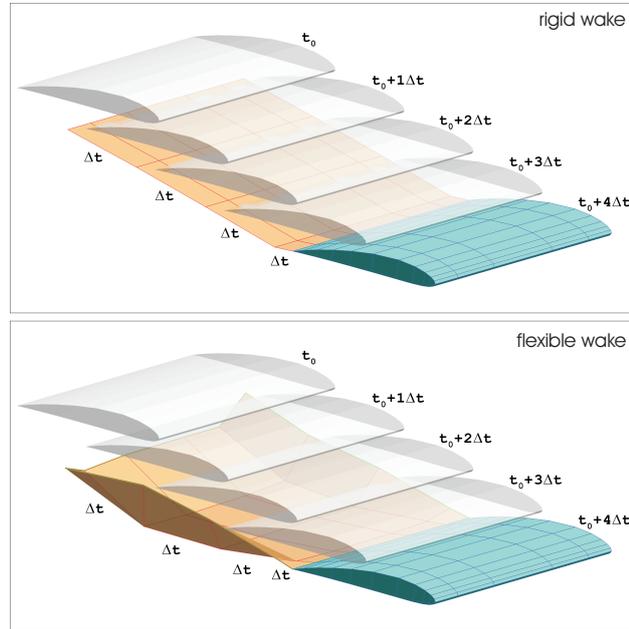


Figura 3.3: scia rigida (sopra) e flessibile (sotto)

Per modellare la scia sono necessari i seguenti passaggi:

- definire la linea di separazione della scia che coincide con il bordo di uscita e di fatto costituisce la prima sezione della scia a pannelli;
- individuare i pannelli del bordo di uscita e il lato dei pannelli dal quale la scia si separa

Come descritto da Katz e Plotkin, la prima fila di pannelli ha una lunghezza, nella direzione della corrente, data da

$$c_w |U_\infty| \cdot t$$

dove il valore di c_w è tipicamente scelto pari a $0.2 \div 0.3$.

Il codice PAMS che verrà introdotto nei prossimi capitoli utilizza $c_w = 0.25$. Per le successive file di pannelli c_w è pari ad 1 e la distanza è data da $|U_\infty| \cdot t$.

3.2.2 Calcolo di velocità e forze

Per il calcolo della velocità totale in ogni punto P esterno al corpo possiamo utilizzare la seguente relazione:

$$\underline{U}(P) = \underline{U}_\infty(P) - \sum_{K=1}^{N_B} \underline{U}_K^\mu \mu_K - \sum_{K=1}^{N_B} \underline{U}_K^\mu \mu_L^w + \sum_{K=1}^{N_B} \underline{U}_K^\sigma \sigma_K \quad (3.24)$$

allo stesso modo, per calcolare le velocità in ogni punto sulla superficie, in particolare nei grid point e control point è possibile utilizzare la (3.22). Per i punti sulla superficie è possibile migliorare l'accuratezza nel calcolo delle derivate con opportune tecniche, ad esempio costruendo una distribuzione di doppiette intorno al punto di interesse.

$$\hat{\mu} = f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \mu_i) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.25)$$

Dopo aver calcolato le velocità sulle superfici è possibile calcolare la corrispondente distribuzione di pressione (o di coefficiente di rpressione):

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty (\underline{U}_\infty^2 - \underline{U}^2) - \rho_\infty \frac{\mu(t) - \mu(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (3.26)$$

$$C_p = 1 - \frac{\underline{U}^2}{\underline{U}_\infty^2} + \frac{\mu(t) - \mu(t - \Delta t)}{\Delta t} \frac{2}{\underline{U}_\infty^2} \quad (3.27)$$

e successivamente le forze agenti sul corpo:

$$\sum_{J=1}^{N_B} p_J \underline{n}_J S_J = \underline{F} \quad (3.28)$$

Capitolo 4

MODELLI DI SCIA A VORTONI E CODICE PaMS

La scia vorticosa di un corpo aerodinamico in movimento è ancora oggi un problema di grande interesse scientifico e industriale. Nel corso degli anni diversi autori si sono cimentati nella formulazione di modelli per la semplificazione e predizione del comportamento della scia.

In questo capitolo viene presentato e analizzato il modello di scia a *vortoni* o *particelle vorticose* che consente la simulazione numerica di campi di moto instazionari, non viscosi e incomprimibili, in presenza di fenomeni di interazione tra corpo e scia, noto limite applicativo dei classici metodi a pannelli.

4.1 I vortoni

Il vortone è un elemento computazionale puntiforme leggermente diverso dai filamenti vorticosi, anelli vorticosi e doppiette generalmente utilizzati per modellare la scia nei metodi a potenziale. Per meglio descrivere il modello, consideriamo una regione vorticoso di volume V . Dato che i metodi a pannelli si basano sulla discretizzazione del dominio di vorticità, considerando una generica griglia uniforme costituita da cubetti di volume h^3 , il vortone non è altro che un vortice tridimensionale puntiforme $\underline{\alpha}_p$ uguale alla vorticità moltiplicata per h^3 . Questo elemento vorticoso può essere espresso come

$$\underline{\alpha}_p(x, y, z, t) = \alpha_{x_p}(t)\mathbf{i} + \alpha_{y_p}(t)\mathbf{j} + \alpha_{z_p}(t)\mathbf{k} \quad (4.1)$$

dove $\alpha_{x_p}(t)$, $\alpha_{y_p}(t)$ e $\alpha_{z_p}(t)$ rappresentano le componenti scalari di $\underline{\alpha}_p$ lungo le direzioni x , y , z fissato il tempo t .

L'equivalenza tra un singolo vortone e un tubo vorticoso di sezione costante è mostrata nella figura 4.1. Un tubo vorticoso può essere discretizzato in più vortoni ognuno pensato come una piccola sezione del tubo vorticoso. Il potenziale vettoriale per il vortone è soluzione dell'equazione di Poisson $\nabla^2 \underline{\Psi} = -\underline{\omega}$ ottenibile come segue

$$\underline{\Psi}(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \int \int_V \frac{\underline{\omega}}{|\underline{r}|} dV' \quad (4.2)$$

Quindi il potenziale vettoriale è dato da

$$\underline{\Psi}_p(\underline{r}, t) = \frac{\underline{\alpha}_p(\underline{r}, t)}{4\pi|\underline{r}|} \quad (4.3)$$

dove $|\underline{r}|$ è la distanza del vortone dal punto di valutazione.

La relazione appena scritta è singolare per $\underline{r} = 0$ e quindi può determinare valori molto elevati quando $|\underline{r}|$ tende a zero, è necessario quindi definire una *core function* ξ_ψ per regolarizzare il potenziale vettoriale, come fatto per il

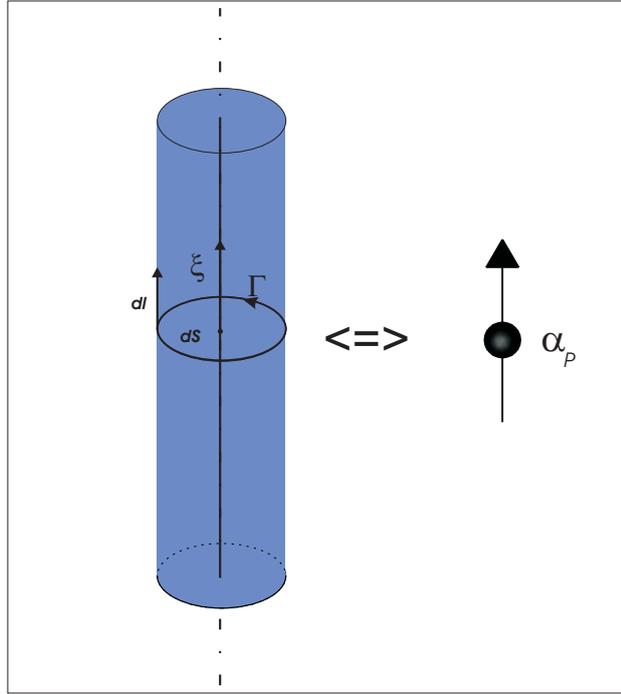


Figura 4.1: tubo vorticoso e vortone

caso di filamenti vorticosi e illustrato nel paragrafo §2.5 Sia σ il *core radius* associato al vortone e sia r_σ il rapporto tra la distanza del punto di valutazione dal vortone e la dimensione del *vortex core radius* ($r_\sigma = |\underline{r}|/\sigma$). Utilizzando un modello di Rankine per ξ_ψ , quando $r_\sigma < 1$ il potenziale vettoriale tende linearmente a zero.

Il campo di velocità indotto dal singolo vortone è dato dal rotore del potenziale vettoriale:

$$\underline{U}_{\Psi_p}(\underline{r}, t) = \underline{\nabla} \times \underline{\Psi}_p(\underline{r}, t) \quad (4.4)$$

Il vortone è quindi un elemento singolare che induce una velocità che decade come $1/r^2$, figura 4.2. Essendo $\underline{\Psi}$ una soluzione dell'equazione di Poisson, il campo di velocità legato al singolo vortone è rotazionale e solenoidale ovunque. Come per il potenziale vettoriale, anche la velocità risulta singolare per $\underline{r} = 0$ e analogamente a quanto fatto per il potenziale vettoriale,

è possibile introdurre una *core function* ξ_U che determina un decadimento lineare a zero della velocità quando $r_\sigma < 1$.

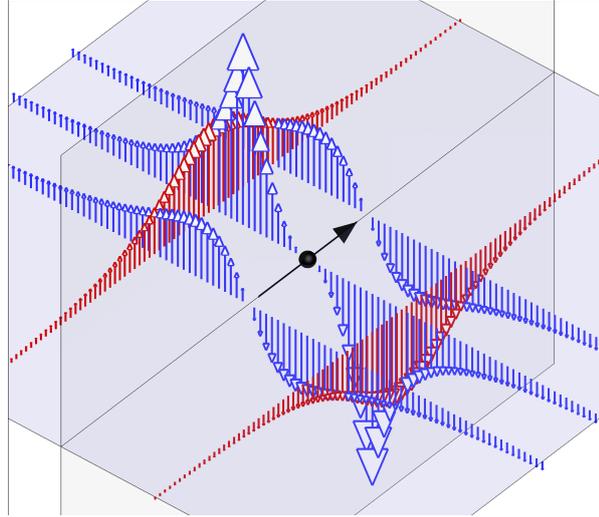


Figura 4.2: campo di moto indotto da un vortone

Da notare che un vortone è diverso da un vortice puntiforme bidimensionale, quest'ultimo infatti è soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2\phi = 0$, quindi $\underline{U} = \underline{\nabla}\phi$ è irrotazionale per definizione e di conseguenza il vortice 2D, mostrato nella figura 4.3, è caratterizzato da velocità tangenziali proporzionali ad $1/r$, infatti risulta $\underline{\nabla}\phi = -\underline{\Gamma}/(2\pi r)$.

L'evoluzione dei vortoni è governata dall'equazione di evoluzione della vorticità che per flussi non viscosi è

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\nabla} \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \underline{\nabla} \underline{U} \quad (4.5)$$

Quindi il moto dei vortoni è legato al vettore velocità locale mentre l'intensità dipende dal gradiente di velocità. Per approssimare il campo di vorticità iniziale è necessario inizializzare i vortoni. Come visto nei capitoli precedenti la scia di un oggetto può essere schematizzata con una distribuzione di dop-

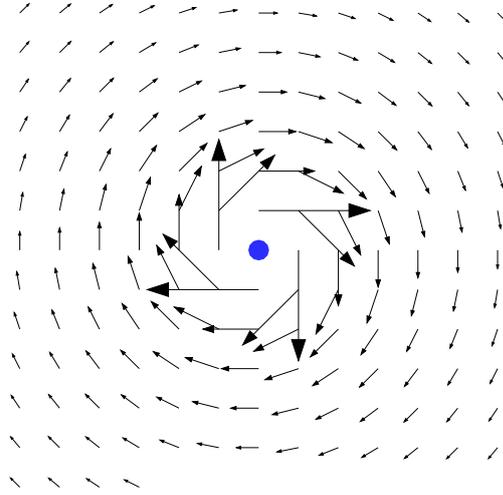


Figura 4.3: campo di moto indotto da un vortice 2D

piette ad intensità costante su ogni pannello di scia oppure equivalentemente con anelli vorticosi costituiti dai lati dei pannelli stessi¹.

I passi necessari per convertire la scia in vortoni in modo da avere equivalenza tra regione vorticoso modellata con questi ultimi e quella modellata da una classica distribuzione di pannelli sono:

- determinare per ogni pannello di doppiette, da convertire in vortoni, il vortice equivalente
- fissare il numero di vortoni da generare per ogni pannello

¹É possibile dimostrare l'equivalenza tra i campi di moto indotti da una distribuzione di vortici e da una opportuna distribuzione di doppiette. In campo 3D data una distribuzione superficiale di doppiette di intensità μ , vale quanto segue: 1) μ costante, la distribuzione di doppiette è equivalente ad un anello vorticoso di intensità $\Gamma = \mu$ con asse coincidente con il bordo della superficie; 2) μ variabile, la distribuzione di doppiette è equivalente alla sovrapposizione di una distribuzione di vortici di intensità $\Delta\mu$ e dell'anello vorticoso del caso precedente, di intensità variabile e coincidente, punto per punto del bordo, con il valore della distribuzione di doppiette

- dividere il pannello in parti uguali

Il vortone è calcolato integrando l'intensità Γ della linea vorticoso che circonda la porzione di area del pannello

$$\underline{\alpha}_p(\underline{r}, t) = \int \Gamma(t) \underline{ds} \quad (4.6)$$

La vorticità è rimpiazzata da una distribuzione di vortoni e quindi il campo è approssimato come una combinazione lineare delle vorticità rappresentate dai singoli vortoni.

$$\underline{\omega}(\underline{r}, t) = \sum_P \underline{\alpha}_p(\underline{r}, t) \quad (4.7)$$

Il campo di velocità $\underline{U}_\Psi(\underline{r}, t)$ è definito come il rotore della funzione di corrente soluzione dell'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \underline{\Psi}(\underline{r}, t) = - \underline{\omega}(\underline{r}, t) \quad (4.8)$$

Ricordando che la funzione di Green $G(\underline{r}, \underline{r}')$ per $\nabla^2 G = \delta(\underline{r}, \underline{r}')$ in domini non limitati è $G(\underline{r}, \underline{r}') = -1/(4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|)$ e in accordo con la (4.3), il vettore potenziale è la somma del potenziale vettoriale di tutti i vortoni nel dominio:

$$\underline{\Psi}(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_p \frac{\underline{\alpha}_p(\underline{r}, t)}{|\underline{r} - \underline{r}_p(t)|} \quad (4.9)$$

Il vettore velocità è ottenuto a partire dalla funzione di corrente $\underline{\Psi}$ come segue

$$\underline{U}_\Psi(\underline{r}, t) = \nabla \times \underline{\Psi}(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_p \frac{[\underline{r} - \underline{r}_p(t)] \times \underline{\alpha}_p(\underline{r}, t)}{|\underline{r} - \underline{r}_p(t)|^3} \quad (4.10)$$

dove le componenti della velocità sono:

$$u_\psi = \frac{1}{4\pi} \sum_p \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_p|^3} [(z - z_p)\alpha_{y_p} - (y - y_p)\alpha_{z_p}] \quad (4.11)$$

$$v_\psi = \frac{1}{4\pi} \sum_p \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_p|^3} [(x - x_p)\alpha_{z_p} - (z - z_p)\alpha_{x_p}] \quad (4.12)$$

$$w_\psi = \frac{1}{4\pi} \sum_p \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_p|^3} [(y - y_p)\alpha_{x_p} - (x - x_p)\alpha_{y_p}] \quad (4.13)$$

Il gradiente di velocità, che determina la variazione di intensità nell'equazione di evoluzione della vorticità, diventa:

$$\nabla \underline{U}_\Psi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_p \nabla \left[\frac{(\underline{r} - \underline{r}_p) \times \underline{\alpha}_p(\underline{r}, t)}{|\underline{r} - \underline{r}_p|^3} \right] \quad (4.14)$$

Riguardo l'evoluzione dei vortoni, questa è caratterizzata da un cambiamento di intensità e posizione. Ogni spostamento dei vortoni dipende dal campo di velocità indotto dalle altre particelle vorticose del dominio.

Usando una rappresentazione Lagrangiana, l'evoluzione della posizione di un singolo vortone dipende dal vettore velocità come segue

$$\frac{d}{dt} \underline{r}_p(t) = \underline{U}_p(\underline{r}_p(t), t) \quad (4.15)$$

La più grande differenza tra il vortice 2D e il vortice 3D è la presenza di un termine che provoca una variazione di intensità e direzione. Nel caso bidimensionale, la direzione della velocità è ortogonale alla direzione della vorticità mentre nel caso tridimensionale, l'equazione di evoluzione della vorticità presenta un termine aggiuntivo che può determinare l'alterazione dell'intensità e direzione della stessa in ogni time step. L'evoluzione del vortone è ottenuta a partire dall'equazione di Helmholtz che con un approccio Lagrangiano porta alla relazione

$$\frac{d}{dt} \underline{\alpha}_p(\underline{r}, t) = \underline{\alpha}_p \cdot \nabla \underline{U}_p(\underline{r}_p(t), t) \quad (4.16)$$

L'equazione di evoluzione dei vortoni può essere integrata nel tempo utilizzando uno schema di *Eulero forward* che prevede prima un aggiornamento della posizione

$$\underline{r}(t+1) = \underline{r}(t) + \underline{U}_p(\underline{r}(t), t) \Delta t \quad (4.17)$$

e successivamente un aggiornamento dell'intensità

$$\underline{\alpha}_p(t+1) = \underline{\alpha}_p(t) + \underline{\alpha}_p(t) \cdot \nabla \underline{U}_p(\underline{r}(t), t) \Delta t \quad (4.18)$$

I vortoni sono più semplici da trattare rispetto ai pannelli di scia classici, infatti nel caso di pannello di scia è necessario calcolare l'induzione determinata da ogni suo lato mentre per i vortoni, che sono elementi puntiformi, bisogna determinare l'induzione di un unico punto per ogni elemento computazionale. Inoltre, un ulteriore vantaggio offerto da una scia modellata con particelle vorticosi è la loro maggiore indipendenza perchè non hanno vincoli geometrici.

4.2 Conversione dei pannelli di scia in vortoni

La scia vorticosi, nei classici metodi a pannelli, viene modellata con una distribuzione di doppiette (o anelli vorticosi) con intensità tale da soddisfare la condizione di Kutta al bordo di uscita. In un metodo a vortoni, la scia è invece modellata con elementi vorticosi puntiformi che offrono notevoli vantaggi computazionali rispetto ai pannelli. Appare evidente la necessità di definire un metodo per la conversione dei pannelli di scia in vortoni da applicare ad un modello di scia non stazionaria.

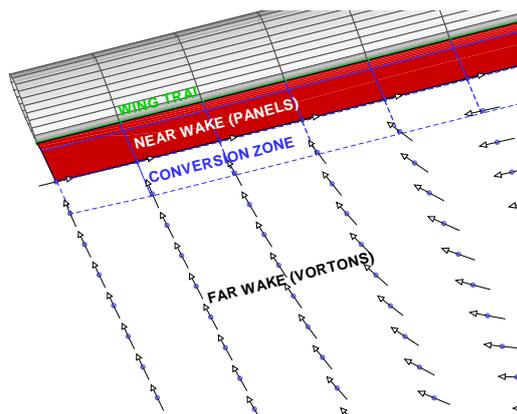


Figura 4.4: modello di scia con vortoni

La scia modellata con vortoni può essere divisa in due parti, una *near wake* o *scia vicina* e una *far wake* o *scia lontana*. La *near wake* è la parte di scia più vicina al corpo, è costituita da pannelli e viene utilizzata per imporre la condizione di Kutta ed aggiornare la vorticità nel dominio. La *far wake* è modellata con vortoni e mostrata nella figura 4.4.

La *near wake* deve avere almeno due file di pannelli, quelli più vicini al bordo di uscita hanno intensità incognita che deve essere determinata imponendo la condizione di Kutta, quelli della seconda fila hanno intensità nota in quanto determinata dalla soluzione della condizione di Kutta nel time step precedente.

Come affermato nel capitolo precedente, la prima fila di pannelli si estende nella direzione del moto per $c_w |U_G| \cdot t$ dove il valore di c_w è 0.25. I pannelli della seconda fila, di intensità nota in quanto pari al salto di potenziale al bordo di uscita imposto nel precedente time step, hanno estensione data da $|U_G| \cdot t$, quindi $c_w = 1$.

In ogni time step, i pannelli della *near wake* traslano a valle, una nuova fila di pannelli viene rilasciata al bordo di uscita e i pannelli che al time step precedente costituivano la seconda fila sono trasformati in vortoni. In questo modo la scia viene costruita gradualmente e in ogni time step sono sempre presenti solo due file di pannelli.

La conversione è articolata in diversi passi:

- i vertici dei pannelli della seconda fila sono convetti a valle con la velocità locale
- la posizione e l'intensità dei vortoni viene calcolata in base al modello scelto

- viene aggiornata l'intensità della linea vorticoso tra la near wake e la far wake

Il modello di conversione sviluppato dal DIAS è caratterizzato dalla collocazione dei vortoni nei vertici dei pannelli di scia trasformati. Facendo riferimento alla figura 4.5, l'intensità dei vortoni viene calcolata come segue:

$$\underline{\alpha}^{k+1} = t_{3w}^k (\Gamma_w^k - \Gamma_w^{k+1}) + t_{3e}^k (\Gamma_e^k - \Gamma_e^{k+1}) \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}^{k+2} = t_{2E}^{k+1} (\Gamma_E^{k+1} - \Gamma_W^{k+1}) + 0.5 t_{3W}^{k+1} (\Gamma_W^{k+1} - \Gamma_W^{k+2}) + \\ + 0.5 t_{3E}^{k+2} (\Gamma_E^{k+1} - \Gamma_E^{k+2}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

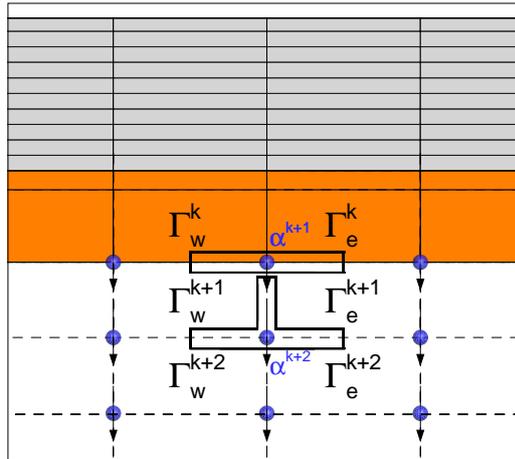


Figura 4.5: modello DIAS

4.3 Codice PaMS

Il modello di scia a vortoni è stato implementato nel codice **PaMS** (**P**anel **M**ethod **S**olver) sviluppato presso il **DIAS**. Il codice PaMS è un software open source per la risoluzione di campi di moto a potenziale con la tecnica

dei metodi a pannello, ottimizzato per ridurre significativamente i tempi di calcolo, impegno dell'utente e risorse hardware.

Una importante caratteristica del codice è il calcolo delle pressioni nei nodi dei pannelli attraverso una tecnica di ricostruzione e derivazione della funzione potenziale che determina risultati migliori rispetto all'operazione di media aritmetica tipica degli altri metodi a pannelli. La possibilità di avere a disposizione i valori di pressione correttamente valutati nei vertici dei pannelli (*grid points*) consente l'accoppiamento con un solver per analisi strutturali usando la medesima pannelazione, consentendo quindi una più rapida analisi delle interazioni fluido-struttura.

L'implementazione del modello di scia a vortoni ha determinato:

- introduzione di una tecnica di trasformazione dei pannelli in vortoni
- introduzione delle velocità indotte dalle distribuzioni di vortoni
- cambiamenti nelle modalità di calcolo delle pressioni

La scia a vortoni garantisce un livello di accuratezza paragonabile a quello ottenuto con una scia a pannelli e non determina incrementi significativi nei tempi di calcolo. Il vantaggio principale offerto da tale modello di scia è la possibilità di analizzare l'interazione della scia con un corpo o con se stessa.

4.4 Parametri caratteristici della scia

Come detto precedentemente, la corretta modellazione della scia è di fondamentale importanza per una stima accurata dei carichi aerodinamici. Il codice PaMS con modello di scia a vortoni consente la soluzione del campo di moto di un rotore in hovering con un'accuratezza che dipende da diversi parametri come l'estensione della scia, la posizione della zona di conversione

dei pannelli in vortoni ed eventuali vincoli di uno o più gradi di libertà della scia numerica.

4.4.1 Estensione della scia

I codici numerici offrono la possibilità di fissare l'estensione della scia stabilendo il numero di *time steps* di permanenza nel dominio di ciascun elemento computazionale (N_W), il che equivale a fissare il massimo numero di elementi usati per la modellazione del campo di moto.

Questo significa che, in ogni simulazione, se il numero di time steps stabiliti per la scia (N_W) è inferiore al numero totale di time steps della simulazione (N_{TOT}), la scia subisce un *troncamento* perchè vengono eliminati in maniera progressiva tutti gli elementi computazionali con tempo di permanenza nel dominio superiore a N_W .

L'eliminazione di pannelli e/o vortoni comporta da un lato una semplificazione della simulazione, a causa della riduzione del numero di elementi computazionali, dall'altro una perdita di informazioni con possibile riduzione dell'accuratezza della soluzione legata all'entità del troncamento e al particolare fenomeno analizzato. Ad esempio nel caso di ala fissa in corrente asintotica uniforme, il troncamento della scia quando è stata raggiunta una condizione stazionaria non comporta variazioni significative della soluzione in quanto vengono eliminati elementi a distanza dal corpo tale da non influenzarne il campo di moto, al contrario un troncamento della scia nelle prime fasi comporta una rapida convergenza ad una soluzione stazionaria ma meno accurata con carico alare mediamente più basso di quello previsto. L'*hovering*, come detto, è caratterizzato da velocità asintotica nulla e da un forte legame tra le velocità indotte dagli elementi vorticosi e la distribuzione di questi ultimi nel dominio, in questo caso l'eliminazione di elementi com-

putazionali, in seguito ad un troncamento della scia, determina una brusca variazione del campo di vorticità con una conseguente alterazione della forma della scia. La figura 4.6 mostra il confronto per diversi istanti di tempo tra la scia di un rotore in hovering *troncata* (fig. 4.6a 4.6b 4.6c) e la stessa scia in assenza di troncamento (fig. 4.6d 4.6e 4.6f).

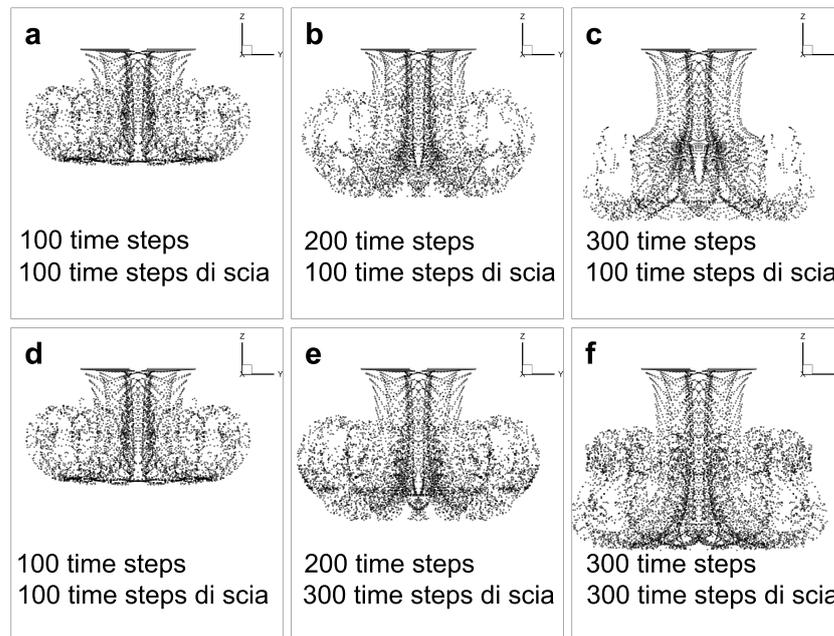


Figura 4.6: rotore in hovering: effetto del *troncamento* della scia

4.4.2 Modellazione della scia

La zona di conversione e il meccanismo di conversione² sono mostrati rispettivamente nelle figure (4.4) e (4.5). Come detto precedentemente, la scia a vortoni è globalmente equivalente alla scia a pannelli dalla quale viene ottenuta, ovvero inducono campi di velocità che differiscono solo in prossimità degli elementi computazionali dove domina l'effetto locale di questi ultimi. In

²per la descrizione del meccanismo di conversione fare riferimento al paragrafo §4.2

caso di corpi aerodinamici isolati immersi in una corrente con velocità asintotica diversa da zero, uno spostamento a valle della zona di conversione dei pannelli in vortoni non comporta apprezzabili variazioni della distribuzione di carico sul corpo, questo perchè gli elementi vengono trascinati a valle dalla corrente asintotica e gli effetti locali dei vortoni sono trascurabili.

Lo spostamento della suddetta zona di conversione può invece avere effetti significativi in tutti i casi in cui sono presenti dei passaggi ravvicinati tra corpo e scia a causa del diverso campo di velocità indotto localmente da vortoni e pannelli. In particolare, il campo di velocità indotto dai pannelli è più uniforme e localmente meno intenso rispetto a quello indotto dai vortoni.

In hovering, la singola pala passa a piccola distanza dalla scia della pala che la precede risentendo degli effetti di induzione locale degli elementi computazionali, per questo motivo uno spostamento della zona di conversione verso valle con maggiore estensione della porzione di scia modellata con pannelli può portare benefici nel calcolo delle distribuzioni di carico sulle pale. In questi casi però lo spostamento verso valle della zona di conversione non è sempre possibile ed è necessaria un'analisi preliminare per la verifica dell'assenza di fenomeni di interazione della scia a pannelli con il corpo che potrebbero portare alla divergenza della soluzione.

4.4.3 Forma della scia

Nell'ambito dei metodi classificati *free wake* è possibile utilizzare diverse tecniche per la simulazione più o meno accurata dell'evoluzione della scia:

- scia *flessibile*
- scia *rigida*
- scia *ad un grado di libertà*

Scia flessibile e scia rigida

La scia flessibile è caratterizzato dal fatto che la sua evoluzione viene calcolata considerando l'effetto locale di tutti gli elementi computazionali presenti nel dominio, in questo modo è possibile la simulazione delle deformazioni subite da una scia reale, come ad esempio il *roll up di estremità*.

La scia rigida è una semplificazione del modello precedente, essa evolve per effetto della sola velocità asintotica e questo comporta una perdita di capacità descrittiva con impossibilità di modellare le deformazioni della scia o l'interazione di quest'ultima con corpi presenti nel dominio. La figura 4.7 mostra il confronto tra scia flessibile (4.7a) e rigida (4.7b), con assenza di deformazione della scia rigida legata all'eliminazione della mutua induzione tra elementi computazionali.

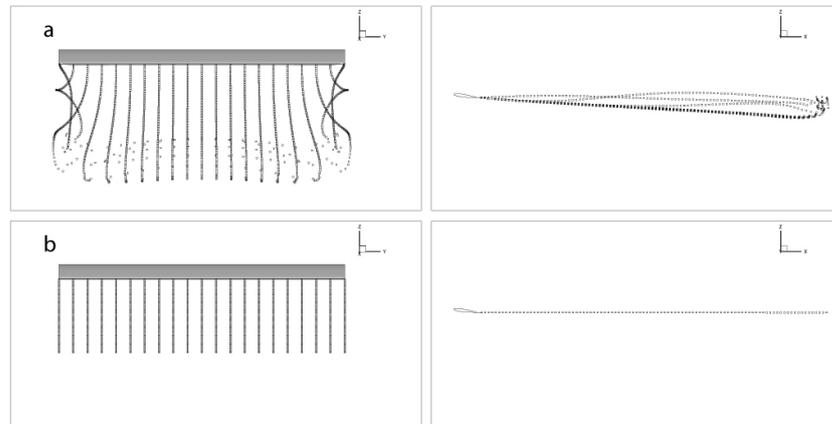


Figura 4.7: ala, modelli di scia: (a) *free wake*, (b) *scia rigida*

La tecnica di *scia rigida* non è utilizzabile nel caso di rotore in hovering, o più in generale nei casi in cui la corrente asintotica è nulla, in quanto l'eliminazione della velocità indotta localmente dagli elementi computazionali presenti nel dominio determina l'impossibilità di simulare l'evoluzione della scia. In figura 4.8 è mostrato il confronto tra la scia flessibile (fig. 4.8a) e

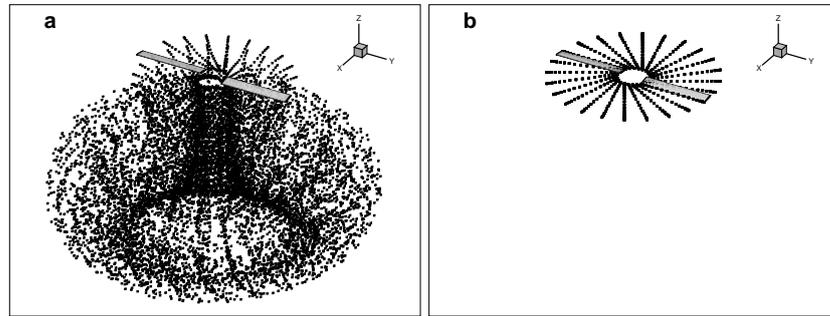


Figura 4.8: rotore in hovering, modelli di scia: (a) *free wake*, (b) *scia rigida*

la scia rigida (fig. 4.8b) di un rotore in hovering a pari tempo di simulazione, è immediato notare che nel caso di scia rigida (fig. 4.8b) i vortoni si sovrappongono localmente non mostrando segno di movimento.

Scia ad un grado di libertà (1 DoF)

La scia ad *un solo grado di libertà* è un modello sviluppato specificamente per l'analisi aerodinamica di rotori (o eliche) a punto fisso e può essere considerato come un adattamento della tecnica di *scia rigida*. Nell'evoluzione del singolo elemento di scia viene annullata la componente radiale della velocità localmente indotta da tutti gli elementi presenti nel dominio. Questa tecnica può essere vista come un ibrido perchè la scia si comporta come se fosse flessibile in direzione assiale e rigida in direzione radiale. Gli elementi di scia, nel caso di rotore in hovering isolato, esibiscono solo un moto assiale da cui il nome *scia ad un grado di libertà*.

Effetto del vortex core radius

La dimensione del *vortex core radius* influenza la forma ed evoluzione della scia in quanto ha effetto sulle velocità localmente indotte dalla distribuzione

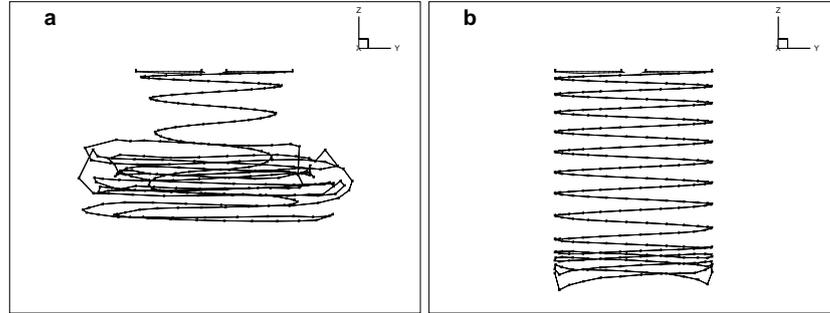


Figura 4.9: rotore in hovering, modelli di scia: (a) *free wake*, (b) *scia 1-DoF*

di elementi vorticosi. Considerando il modello di vortice di Rankine³, la *vortex core function*, definita per $r < r_c$, impone un decadimento lineare della velocità indotta con la distanza dall'elemento vorticoso (r), mentre per $r > r_c$ la velocità è modellata dalla relazione di Biot-Savart, di conseguenza la variazione di r_c ha effetto solo sui punti che appartengono al *vortex core* o che sono vicini alla frontiera di quest'ultimo.

L'aumento di r_c determina un'estensione della zona interessata dalla caduta lineare di induzione, una riduzione di quest'ultima sulla frontiera del *vortex core* e un conseguente abbassamento del valore medio di velocità indotta. La scia mostra complessivamente una riduzione di flessibilità e al limite, con r_c molto elevato, le velocità indotte in ogni punto della scia sono tanto piccole da portare al modello di *scia rigida* (fig. 4.10)

La riduzione di r_c comporta invece un aumento dell'induzione media nei punti prossimi al *vortex core* e di conseguenza una maggiore flessibilità della scia. In questo caso possiamo individuare un r_c minimo pari alla minima distanza tra elementi computazionali nel dominio, per $r_c < r_{c,min}$ non si hanno variazioni nella forma ed evoluzione della scia in quanto ogni elemento si trova all'esterno del *vortex core* degli elementi adiacenti e di conseguenza

³fare riferimento al paragrafo §2.5

le velocità sono regolate dalla legge di Biot-Savart e non dalla *vortex core function*.

In hovering, l'evoluzione della scia dipende solo dal campo di velocità indotto dagli elementi computazionali, per questo motivo il *vortex core radius* assume un ruolo determinante nelle simulazioni. La figura 4.11 mostra la scia di un rotore in hovering valutata con diversi valori di r_c , è possibile osservare che per r_c più basso (fig. 4.11a) la scia mostra una elevata flessibilità con velocità indotte nella zona di radice tali da provocare un moto verso l'alto delle particelle vorticosi, mentre per il valore più elevato di r_c (fig. 4.11c) l'irrigidimento porta ad una non corretta valutazione dello sviluppo della scia. Appare quindi evidente come la scelta del range di valori del *vortex core radius* più adatto sia un aspetto molto delicato nelle simulazioni di hovering.

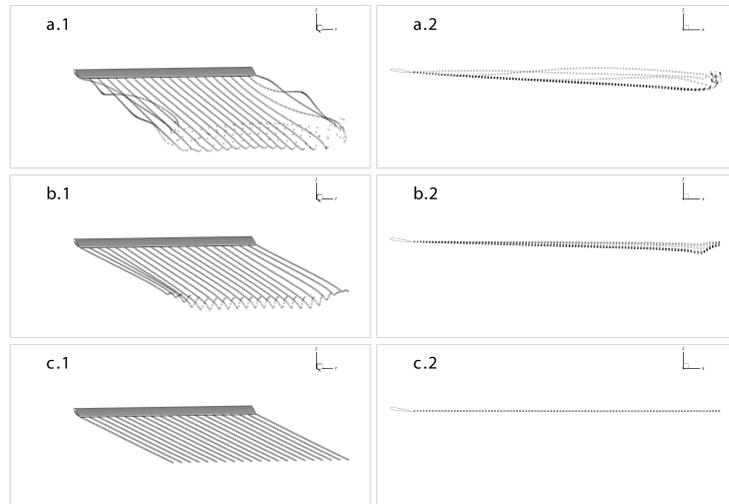


Figura 4.10: ala, effetto vortex core: (a) $r_c/b = 0.01$, (b) $r_c/b = 0.1$, (c) $r_c/b = 1$

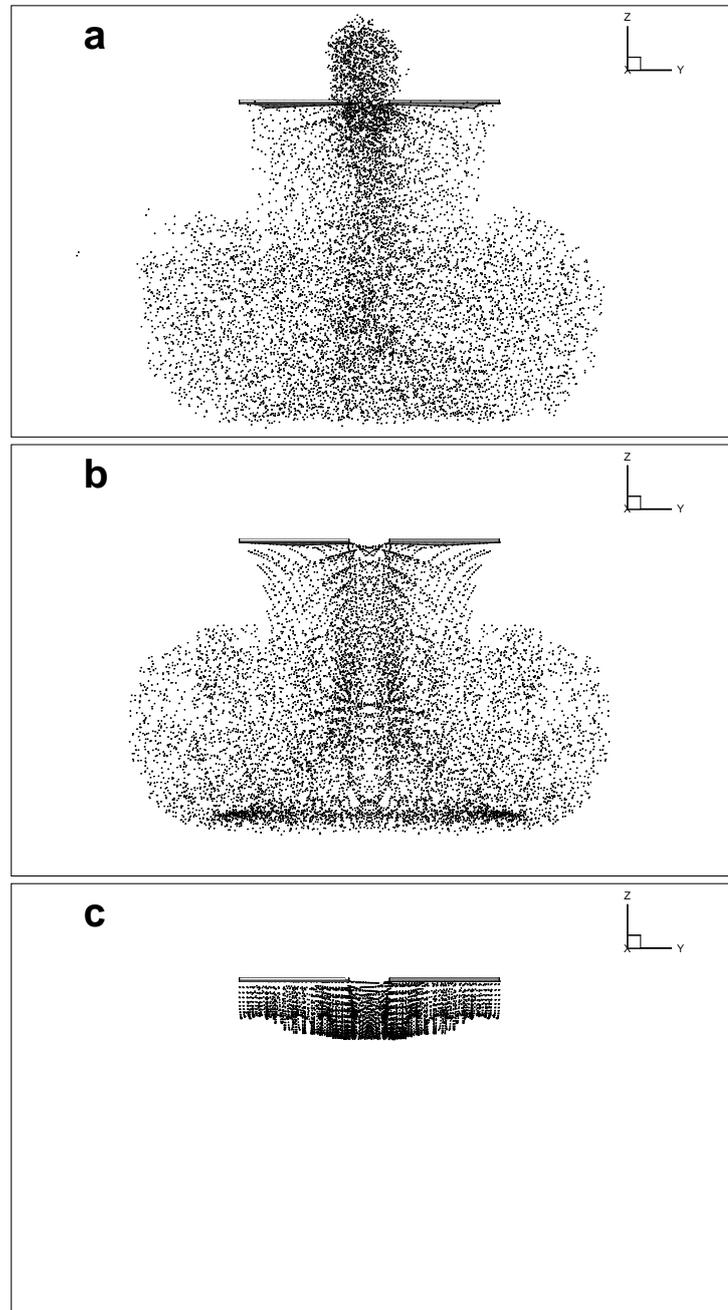


Figura 4.11: rotore in hovering, effetto vortex core: (a) $r_c/D = 0.01$, (b) $r_c/D = 0.1$, (c) $r_c/D = 1$

Capitolo 5

RISULTATI PER IL TEST

NASA TM81232

In questo capitolo sono presentati i principali risultati ottenuti con l'applicazione di un metodo a vortoni, implementato nel codice PaMS, per lo studio aerodinamico dell'hovering di un modello semplificato del rotore studiato sperimentalmente dalla NASA all'inizio degli anni '80. Il confronto numerico-sperimentale viene utilizzato per determinare l'effetto dei diversi parametri di simulazione sulla soluzione e per verificare le capacità descrittive dei modelli di scia adoperati individuando quelli che forniscono risultati più vicini ai dati sperimentali.

5.1 Dati sperimentali NASA TM81232

I dati sperimentali, presi in considerazione da molti autori per la validazione dei metodi numerici per l'analisi aerodinamica di rotori in hovering, sono forniti dal report NASA TM81232 del 1981 [19].

Gli esperimenti sono stati eseguiti nell'*Army Aeromechanics Laboratory* in una speciale camera di prova dotata di un sistema di aspirazione dell'aria per eliminare fenomeni di ricircolo. Il rotore testato (fig. 5.1) ha un raggio complessivo di $1.143m$ ed è costituito da due pale non svergolate e non rastremate con profilo alare NACA 0012, corda di $0.16m$ e allungamento alare pari a 6. Ogni pala è dotata di 60 tubi di pressione organizzati in modo da fornire letture in 5 diverse sezioni come mostrato nella figura 5.3. La posizione del vortice di estremità, riportata in figura 5.2, è stata ottenuta con un processo di elaborazione del segnale fornito da un anemometro a filo caldo posto a valle della pala.

Il metodo di analisi utilizzato in questo lavoro di tesi è basato sulle ipotesi di flusso non viscoso e incomprimibile quindi si è scelto di effettuare un confronto numerico sperimentale con i dati relativi all'esperimento NASA condotto con calettamento della pala di $8deg$ e velocità di rotazione di $1250rpm$ in quanto in queste condizioni il numero di Mach all'estremità risulta tale da poter ritenere la densità costante ($M_{tip} \simeq 0.46$) e il numero di Reynolds è sufficientemente elevato da poter ritenere trascurabili gli effetti viscosi all'esterno della scia e dello strato limite ($Re \simeq 2 \times 10^6$).

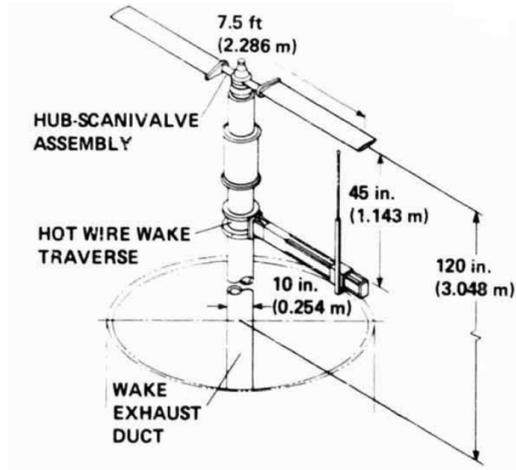


Figura 5.1: rotore NASA

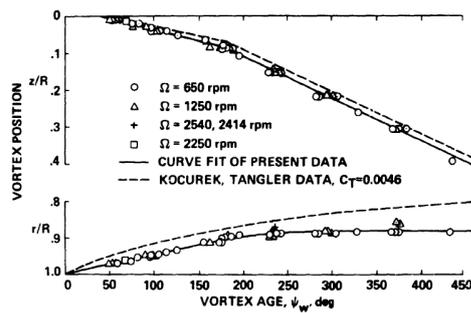


Figura 5.2: traiettoria sperimentale del vortice di estremità

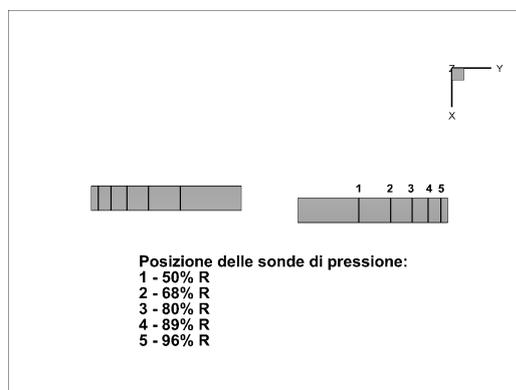


Figura 5.3: CAD delle pale con traccia delle stazioni di rilevamento della pressione

5.2 Modello numerico

Il modello computazionale utilizzato nelle simulazioni è costituito da due pale isolate di dimensioni identiche a quelle del rotore testato dalla NASA e descritto precedentemente. L'albero e il mozzo non vengono considerati perchè test preliminari hanno evidenziato un loro scarso impatto sulla qualità delle soluzioni con un significativo aumento dei tempi di calcolo.

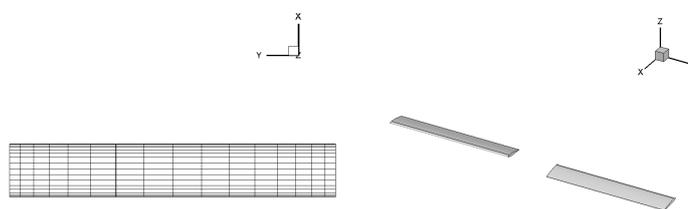


Figura 5.4: pannellazione usata nelle simulazioni

La pannellazione delle pale (fig. 5.4) è stata realizzata in modo da garantire una buona risoluzione nelle zone caratterizzate da forti gradienti di pressione con tempi di calcolo non eccessivamente lunghi. In particolare dorso e ventre di ciascuna pala sono stati suddivisi in pannelli rettangolari, 16 pannelli disposti lungo l'apertura e 16 pannelli lungo la corda utilizzando una legge di distribuzione biesponenziale per imporre una maggiore densità al bordo d'attacco, bordo di uscita e alle estremità. La dimensione minima dei pannelli in direzione *spanwise* è del 20% di corda mentre in direzione *chordwise* è del 4% di corda.

Le simulazioni sono state effettuate mantenendo costante la distribuzione di pannelli e il numero massimo di *time steps* concentrando l'attenzione sull'effetto della variazione di tre parametri:

- numero di *time steps* per giro;

- dimensione del *vortex core radius*;
- modello di scia adoperato.

Avendo fissato sia la velocità di rotazione che il numero massimo di intervalli di tempo delle simulazioni, la durata del *time step* non solo determina la risoluzione di cattura della scia, in termini di angolo coperto dalla pala in un singolo intervallo di tempo, ma anche il numero massimo di rivoluzioni del rotore. Le simulazioni sono state effettuate per dt di $0.002s$, $0.003s$ e $0.004s$ cui corrispondono $d\psi$ di $15deg$, $22.5deg$ e $30deg$.

Il modello di *vortex core* adoperato è quello di Rankine con r_c costante¹, le simulazioni sono state effettuate per $r_c/D = 0.044$, 0.088 , 0.132 ,

L'hovering è un fenomeno stazionario, i dati che saranno presentati sono da intendersi mediati nel tempo per ridurre l'effetto di eventuali errori numerici, in particolare la media temporale viene eseguita sull'ultimo giro simulato. Il codice inoltre è basato su un modello incomprimibile² quindi per un confronto con i dati sperimentali è stata utilizzata la correzione di comprimibilità di Prandtl-Glauert (5.1), ritenuta adeguata considerando il range di valori di numero di Mach nel quale opera il rotore ($M < 0.46$).

$$C_{p,comp} = \frac{C_{p,inc}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad (5.1)$$

I dati estratti dalle simulazioni e confrontati con i dati sperimentali sono:

- coefficiente di spinta (C_T);
- distribuzione di C_l lungo l'apertura della pala;
- traiettoria del vortice di estremità

¹nella realtà il *vortex core radius* varia nel tempo

²l'equazione di Biot-Savart è valida in regime non comprimibile

Il coefficiente di spinta C_T è definito nell'equazione 5.2 dove T è la spinta del rotore, A è l'area del disco battuto dalle pale e V_{tip} è la velocità tangenziale all'estremità della pala, i dati NASA riportano un $C_T = 0.00459$ per l'esperimento preso in esame.

$$C_T = \frac{T}{\rho A V_{tip}^2} \quad (5.2)$$

La forza T è calcolata come integrazione della pressione sulla superficie del rotore e la correzione di comprimibilità del coefficiente di spinta viene effettuata considerando il valore del numero di Mach al 75% del raggio (R).

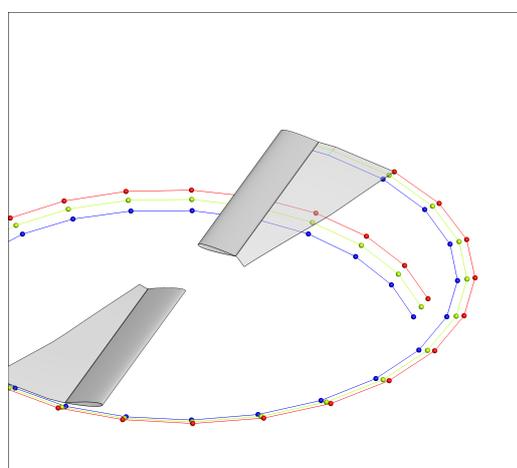
Il coefficiente di portanza lungo l'apertura della pala (C_l) viene calcolato integrando la pressione sulle singole strisce di pannelli ortogonali al raggio e adimensionalizzando rispetto al prodotto tra la pressione dinamica locale, valutata nella mezzeria dei pannelli, e l'area totale dei pannelli della suddetta striscia. Anche in questo caso viene applicata una correzione di Prantl-Glauert per tener conto degli effetti di comprimibilità.

Nel confronto numerico sperimentale delle traiettorie dei vortici, generalmente si prende in considerazione solo il *tip vortex* perchè ha una intensità molto elevata che da un lato determina un effetto maggiore sul campo di velocità e dall'altro rende più semplice l'individuazione della sua traiettoria.

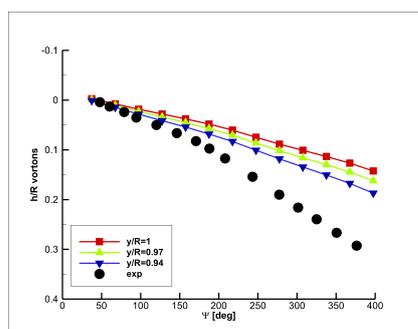
La forma e l'evoluzione della scia numerica sono state ricavate mediante post-processing dell'output del codice **PaMS** ed è stato effettuato un confronto numerico sperimentale con i dati di riferimento mostrati nella figura 5.2.

Come detto precedentemente, l'elevata variazione di carico in prossimità dell'estremità delle pale determina il rilascio nella corrente di vortici liberi molto intensi che per effetto del rapido *roll up* della scia vorticoso si combinano in un vortice di estremità particolarmente intenso, la cui traiettoria viene catturata mediante osservazioni sperimentali.

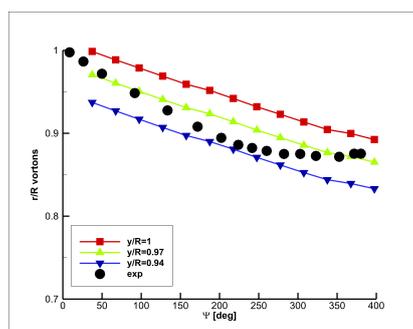
L'analisi numerica effettuata con il codice PaMS, a differenza di quella sperimentale, consente la cattura delle traiettorie dei singoli filamenti vorticosi quindi è possibile che il *tip vortex* sperimentale abbia traiettoria diversa dal *tip vortex* numerico. Le figure (5.5b) e (5.5c) mostrano la posizione radiale ed assiale dei vortici liberi rilasciati alle posizioni mostrate nella figura 5.5a. Per semplicità di rappresentazione, in seguito verranno mostrati solo



(a)



(b) posizione assiale



(c) posizione radiale

Figura 5.5: PaMS, traiettoria vortoni

le traiettorie calcolate per il *tip vortex*.

5.3 Analisi dei risultati

Le simulazioni sono state eseguite con 3 diversi modelli di scia:

- scia con *near wake*³ costituita da 2 pannelli
- scia con *near wake* con estensione di un giro
- scia ad un grado di libertà (*scia 1DoF*)

Scia con *near wake* costituita da 2 pannelli

La *near wake* di 2 pannelli implica una zona di transizione con posizione variabile a seconda della dimensione del *time step*, infatti considerando quanto detto nel capitolo precedente, i primi due pannelli di scia hanno estensione angolare complessiva pari a $1.25 \cdot \Delta\Psi$.

Possiamo affermare che per $r_c/D = 0.044$ e $r_c/D = 0.088$ la soluzione converge dopo circa 10 giri del rotore in quanto il coefficiente di spinta, mostrato nella figura 5.6, tende ad un valore costante e non sono presenti significative differenze nelle pressioni valutate sulle pale.

L'andamento del coefficiente di spinta, figura 5.6, è caratterizzato da un forte picco iniziale e da brusche variazioni nelle prime fasi delle simulazioni (fig. 5.7). Durante i primi istanti, la velocità indotta assialmente dalla distribuzione di elementi computazionali nella scia è nulla e l'angolo d'attacco visto dalle pale è pari a quello di calettamento (*8deg*), con il passare del tempo, la comparsa di una velocità assiale rivolta verso il basso, che spinge la scia verso valle, determina una riduzione dell'angolo d'attacco effettivamente

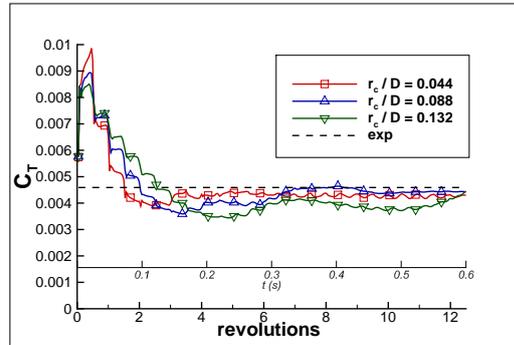
³in un metodo a vortoni indica la porzione di scia a pannelli che si estende dal *T.E.* fino alla zona di transizione pannelli-vortoni, a valle di questa zona di transizione si trova la *far wake* costituita da vortoni

visto dalle pale con una conseguente riduzione del carico alare e del coefficiente di spinta. A regime la velocità assiale media sul rotore è costante e si raggiunge una condizione stazionaria. Le brusche variazioni che si presentano ogni mezzo giro sono l'effetto dell'interazione delle pale con la scia.

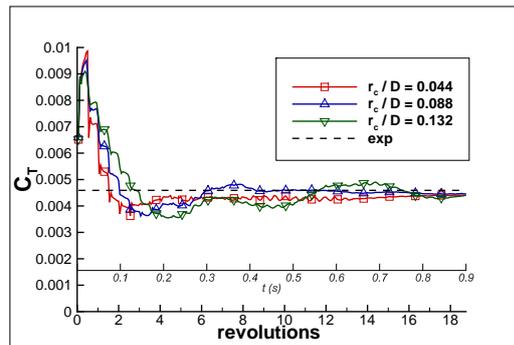
Il picco iniziale è causato dal vortice di avviamento, particolarmente intenso per la partenza istantanea, mentre le brusche variazioni sono l'effetto dell'interazione delle pale con la scia. Con il passare del tempo la velocità indotta assialmente trasporta il vortice di avviamento a valle e determina un moto elicoidale della scia in prossimità del rotore con conseguente riduzione del valore del coefficiente di spinta e attenuazione delle oscillazioni.

Le distribuzioni di coefficiente di portanza nei vari casi analizzati sono mostrate nelle figure (5.8)→(5.10) ed è possibile osservare che il buon accordo numerico-sperimentale sul coefficiente di spinta non corrisponde ad una valutazione corretta della distribuzione del coefficiente di portanza, infatti il codice tende a sovrastimare il carico alare in prossimità delle estremità e a sottostimarlo nella zona di radice, effetto accentuato dall'aumento del Dt . Indipendentemente dai valori del coefficiente di portanza calcolati, possiamo comunque osservare che per $r_c/D = 0.044$ il picco di portanza cade intorno al 95% del raggio come nel caso sperimentale.

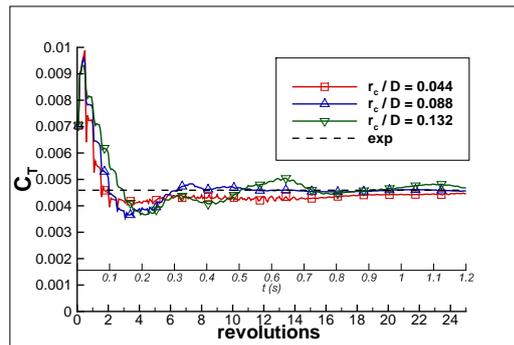
La figura 5.11 riporta il confronto tra la traiettoria del vortice di estremità misurata sperimentalmente e quella calcolata numericamente al variare della dimensione del *vortex core radius* e del *time step*. I grafici mostrano, in maniera più evidente rispetto a quelli precedenti, l'effetto del *time step* sulla soluzione, infatti per valori di Dt crescenti diminuisce il numero di time steps necessari per coprire il singolo giro, quindi diminuisce la risoluzione con la quale viene catturata la scia, e questo determina, a parità di r_c , una traiettoria del tip vortex meno vicina a quella sperimentale.



(a) $Dt = 0.002s$



(b) $Dt = 0.003s$



(c) $Dt = 0.004s$

Figura 5.6: coefficiente di spinta C_T

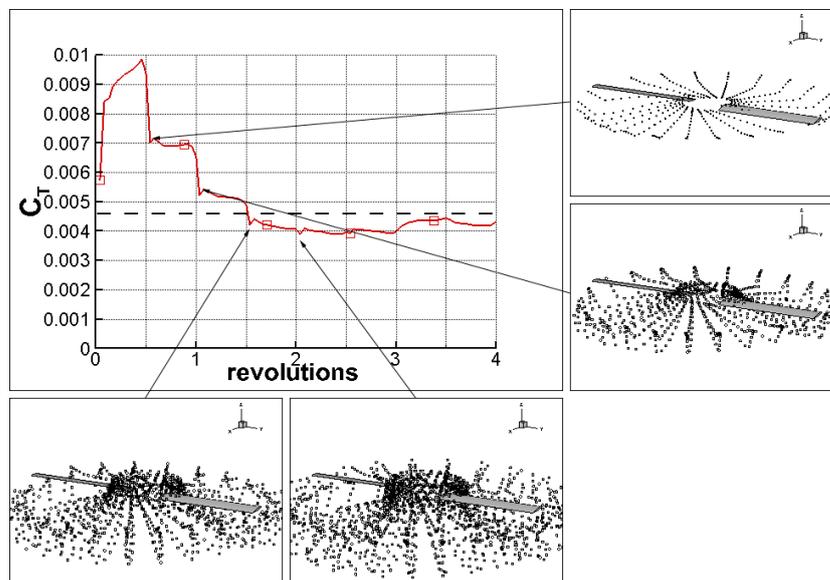
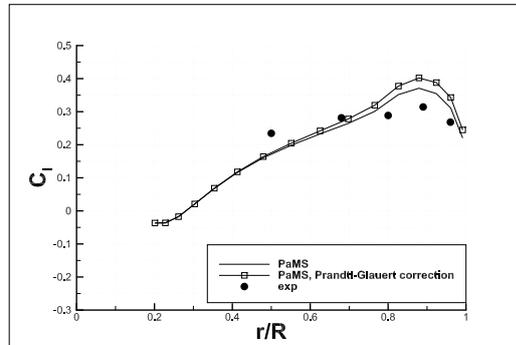
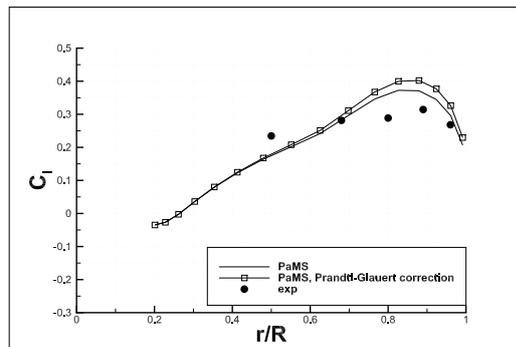


Figura 5.7: coefficiente di spinta C_T nei primi istanti di simulazione

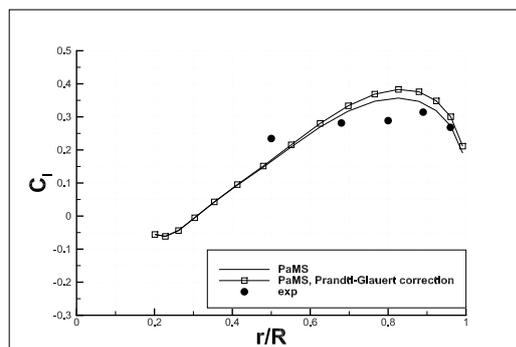
Dal confronto numerico sperimentale inoltre emerge che, a parità di Dt , valori di r_c minori forniscono risultati migliori almeno per quanto riguarda l'andamento delle curve, infatti è possibile notare che per $r_c/D = 0.044$ la posizione radiale (r/R) calcolata è molto vicina a quella sperimentale per $\Psi < 180deg$, mentre per $\Psi > 180deg$ si verifica una variazione di pendenza di entità diversa rispetto a quella delle curve sperimentali, per quanto riguarda la posizione assiale (h/R), è possibile osservare un buon accordo tra l'andamento numerico e sperimentale.



(a) $r_c/D = 0.044$

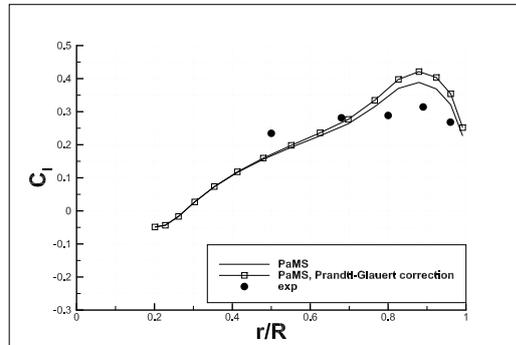


(b) $r_c/D = 0.088$

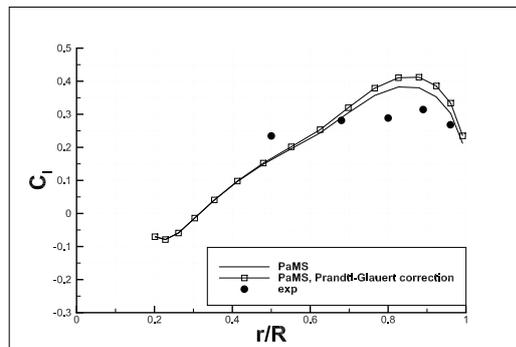


(c) $r_c/D = 0.132$

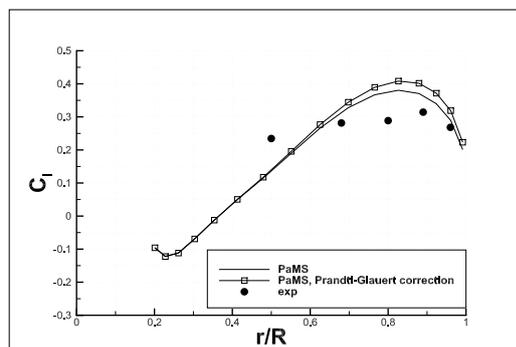
Figura 5.8: scia con *near wake* di 2 pannelli: distribuzione di C_l per $Dt = 0.002s$



(a) $r_c/D = 0.044$

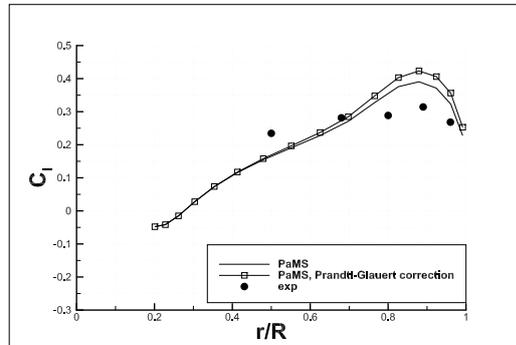


(b) $r_c/D = 0.088$

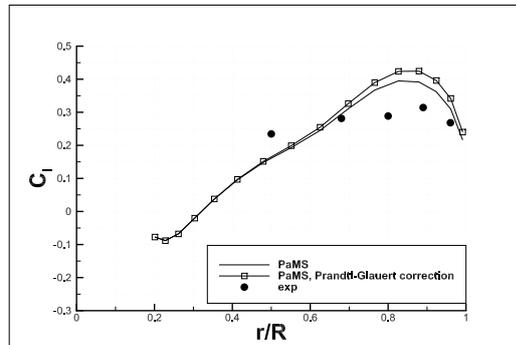


(c) $r_c/D = 0.132$

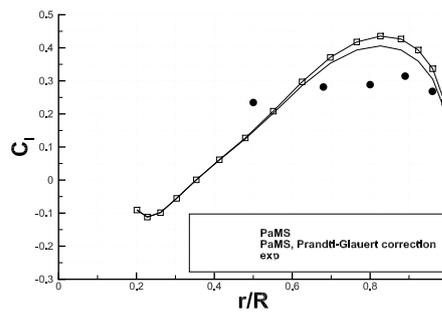
Figura 5.9: scia con *near wake* di 2 pannelli: distribuzione di C_l per $Dt = 0.003s$



(a) $r_c/D = 0.044$

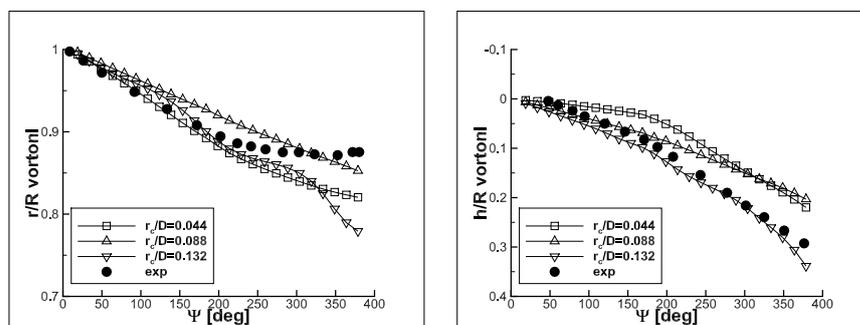


(b) $r_c/D = 0.088$

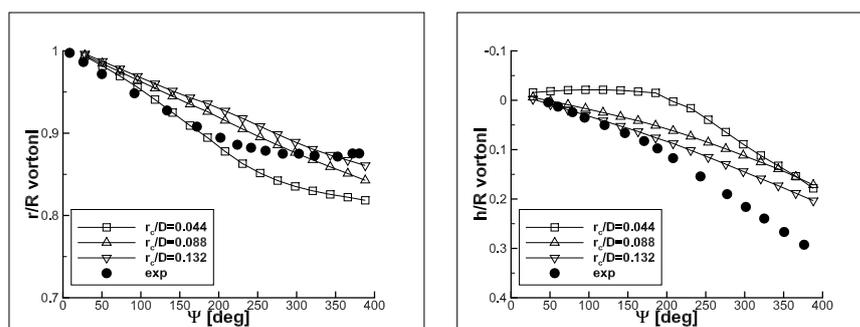


(c) $r_c/D = 0.132$

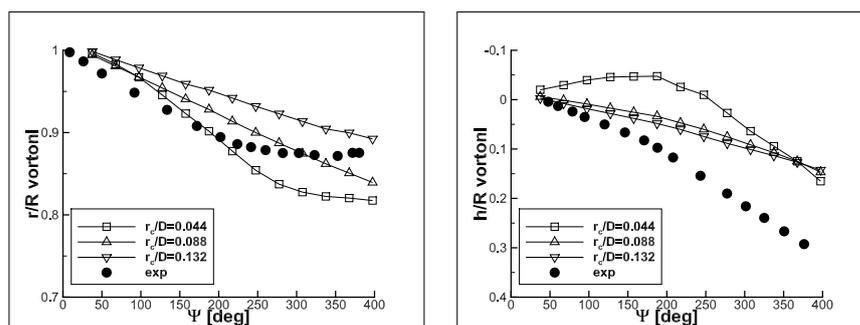
Figura 5.10: scia con *near wake* di 2 pannelli: distribuzione di C_l per $Dt = 0.004s$



(a) $Dt = 0.002s$



(b) $Dt = 0.003s$



(c) $Dt = 0.004s$

Figura 5.11: Scia con *near wake* di 2 pannelli, traiettoria del *tip vortex*: r/R =posizione radiale - h/R =posizione assiale

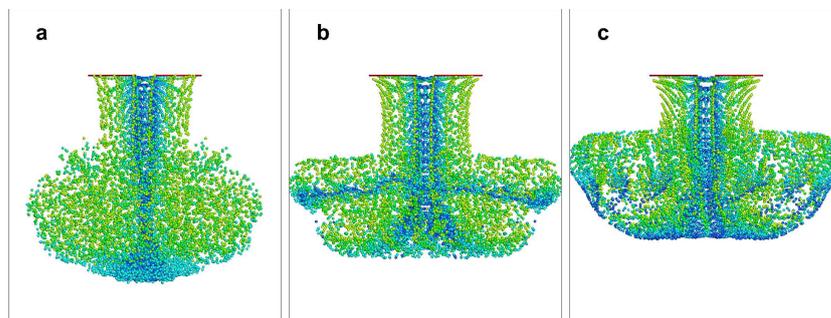


Figura 5.12: effetto del *vortex core radius* sulla forma della scia - (a) $r_c/D = 0.044$, (b) $r_c/D = 0.088$, (c) $r_c/D = 0.132$

Scia con near wake con estensione di un giro

I risultati delle simulazioni con *near wake di 2 pannelli* hanno evidenziato una significativa differenza tra distribuzione di carico sperimentale e numerica, conseguenza di una non accurata simulazione del campo di velocità e quindi della distribuzione di elementi vorticosi nel dominio. Alcuni ricercatori come Duck Joo Lee [39] ritengono che la causa delle instabilità della scia numerica, e di conseguenza degli errori nella valutazione del campo di velocità, sia il vortice di avviamento molto intenso che si genera a causa della partenza istantanea del rotore e propongono la simulazione di un avviamento graduale per superare il problema. Questa tecnica, applicata al codice PaMS, non ha prodotto risultati apprezzabili in quanto tutti i test effettuati hanno prodotto soluzioni molto vicine a quelle descritte nel precedente paragrafo, quindi è possibile ritenere che la causa degli errori di valutazione del carico aerodinamico è da attribuire non tanto al vortice di avviamento ma al campo di velocità locale indotto dai vortoni e nell'impatto che questo ha sull'evoluzione della scia.

Da questa considerazione, ricordando il diverso campo di moto localmente indotto da pannelli e vortoni, si è deciso di effettuare delle simulazioni

fissando l'estensione della *near wake* pari al numero di *time steps* necessari per un giro del rotore. I limiti di applicabilità di tale metodo coincidono con quelli dei metodi a pannelli classici, quindi l'applicazione è limitata ai casi in cui non si prevedono interazioni tra scia e corpo, in particolare nelle simulazioni con $r_c/D = 0.044$ la deformazione della scia a pannelli nella zona della radice rende impossibile l'estensione di quest'ultima per più di mezzo giro e questo porta risultati in linea con quelli ottenuti nel precedente paragrafo.

Inoltre non è consigliabile aumentare ulteriormente l'estensione della porzione di scia modellata con pannelli perchè non solo si andrebbe a ridurre il vantaggio offerto dalla scia a vortoni ma si rischierebbe di perdere in accuratezza della soluzione a causa dell'eccessiva deformazione dei pannelli con possibile divergenza della soluzione.

La figura 5.14 mostra l'andamento del C_T e anche in questo caso è possibile notare un picco iniziale e un successivo graduale abbassamento dei valori di C_T fino al raggiungimento di una condizione stazionaria dopo circa 10 rivoluzioni. Nei primi istanti di tempo, la curva del C_T presenta delle oscillazioni più forti rispetto al caso precedentemente analizzato, dovute principalmente alla deformazione dei pannelli di scia in seguito all'interazione con la pala o con la scia stessa. A regime, passato il transitorio iniziale, la superficie a pannelli che modella la scia vorticosa assume una forma elicoidale (fig. 5.13).

Le figure 5.16→5.18 riportano l'andamento del coefficiente di portanza sulla pala ed è possibile osservare un migliore accordo tra dati numerici e sperimentali.

Il confronto numerico sperimentale sulla traiettoria dei vortici di estremità, riportato nella figura 5.15, mostra apprezzabili differenze, rispetto ai test effettuati con *near wake* di due pannelli, solo nella valutazione della posizione radiale.

Il modello di scia utilizzato in queste simulazioni determina delle distribuzioni di C_l più vicine ai dati sperimentali rispetto a quelle ottenute precedentemente, le piccole differenze della traiettoria dei vortici di estremità valutate con i due modelli di scia portano a concludere che la migliore qualità delle soluzioni è da attribuire non alla forma della scia a valle del rotore, e quindi all'evoluzione della scia, ma al diverso campo di moto locale indotto dai pannelli.

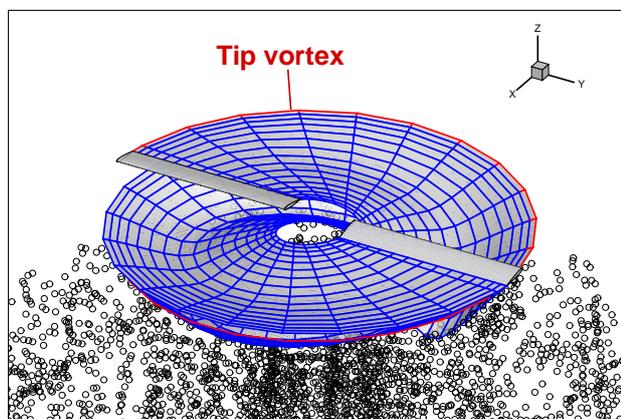
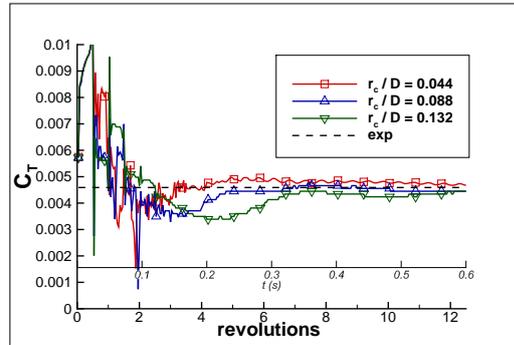
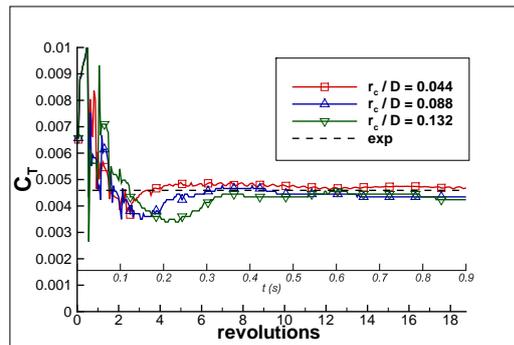


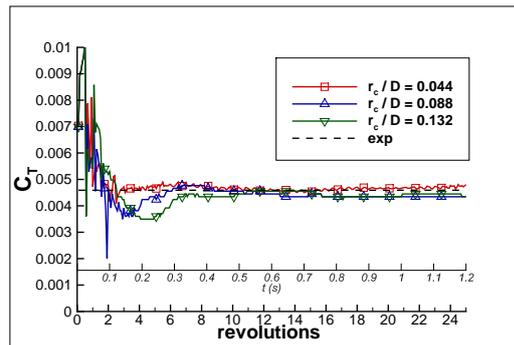
Figura 5.13: scia con *near wake* di un giro: *tip vortex*



(a) $Dt = 0.002s$

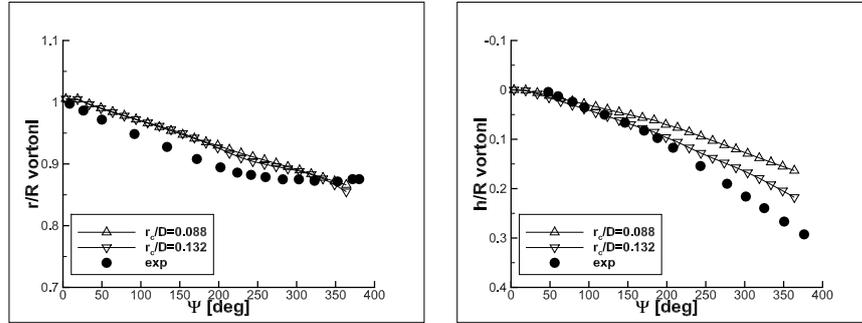


(b) $Dt = 0.003s$

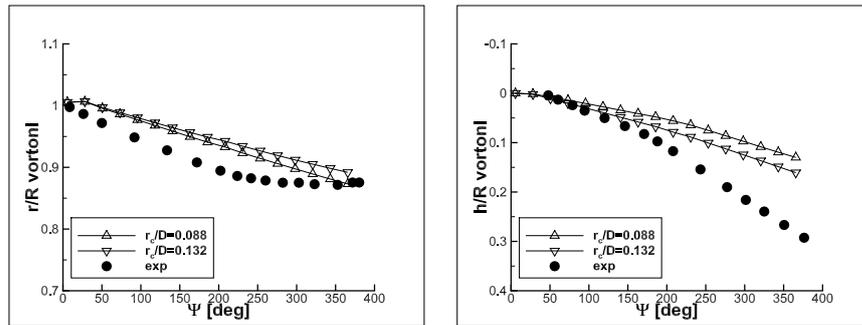


(c) $Dt = 0.004s$

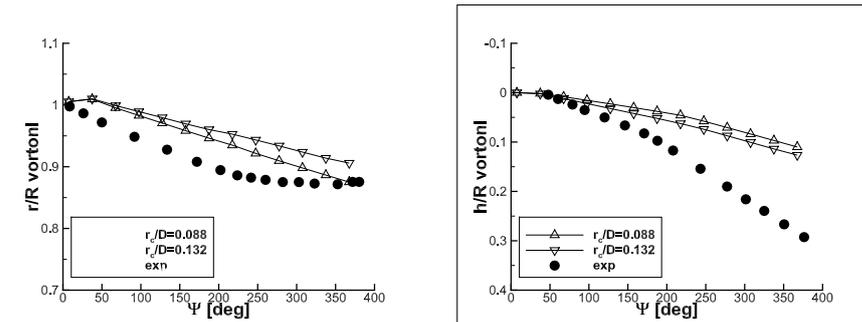
Figura 5.14: scia con *near wake* di un giro: coefficiente di spinta (C_T)



(a) $Dt = 0.002s$

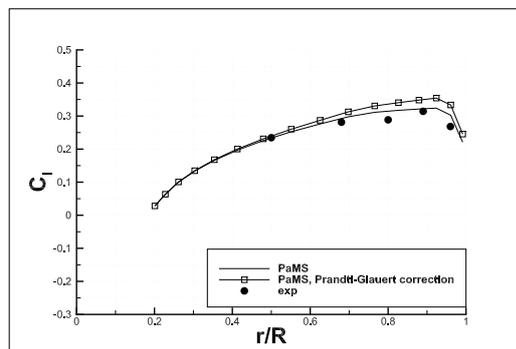


(b) $Dt = 0.003s$

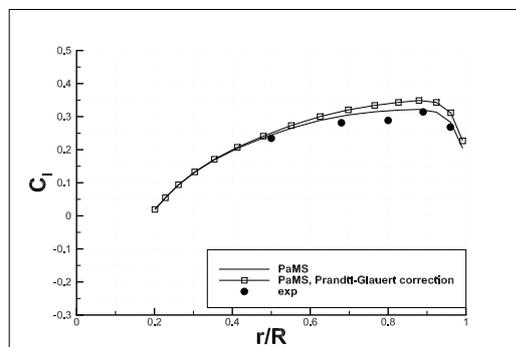


(c) $Dt = 0.004s$

Figura 5.15: Scia a vortoni, traiettoria del *tip vortex*: r/R =posizione radiale - h/R =posizione assiale

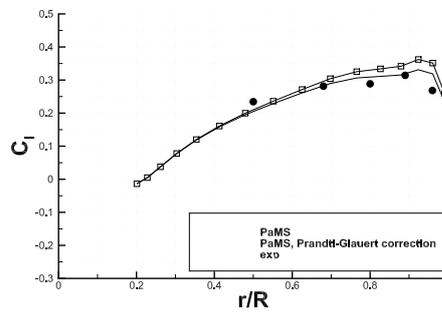


(a) $r_c/D = 0.088$

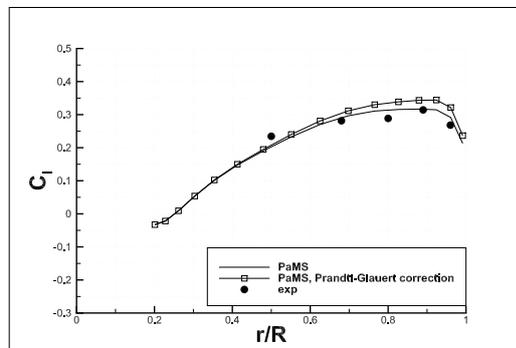


(b) $r_c/D = 0.132$

Figura 5.16: scia con *near wake* di un giro: distribuzione di C_l per $Dt = 0.002s$

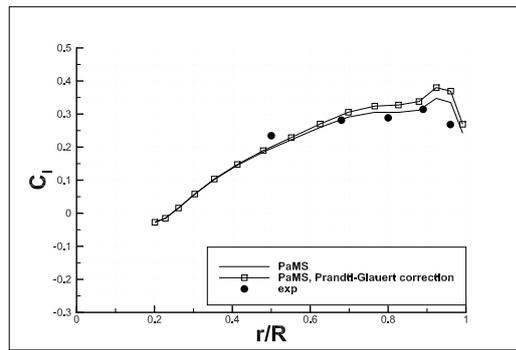


(a) $r_c/D = 0.088$

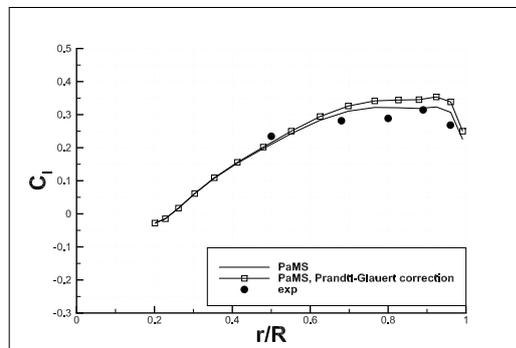


(b) $r_c/D = 0.132$

Figura 5.17: scia con *near wake* di un giro: distribuzione di C_l per $Dt = 0.003s$



(a) $r_c/D = 0.088$



(b) $r_c/D = 0.132$

Figura 5.18: scia con *near wake* di un giro: distribuzione di C_l per $Dt = 0.004s$

Scia ad un grado di libertà (1 DoF)

L'ultima serie di test sono stati effettuati con scia ad un grado di libertà, descritto nel capitolo precedente, con uguali impostazioni delle simulazioni presentate fino ad ora.

La figura 5.19 riporta l'andamento del coefficiente di spinta ed è immediato notare una più rapida convergenza della soluzione, sono infatti necessari 8 giri del rotore e non 10 come nei casi precedenti, e una maggiore regolarità e vicinanza delle curve, diretta conseguenza dell'assenza di deformazione radiale della scia che determina minori differenze nell'evoluzione della stessa al variare del *vortex core radius*.

Le figure 5.20→5.22 mostrano la distribuzione del coefficiente di portanza lungo la pala ed è possibile osservare che per $r_c/D = 0.044$ la curva calcolata tende a sovrapporsi a quella sperimentale, per valori crescenti di r_c le curve si discostano sempre maggiormente da quella sperimentale raggiungendo un andamento simile a quello ottenuto nelle simulazioni con modello di scia con *near wake* di 2 pannelli.

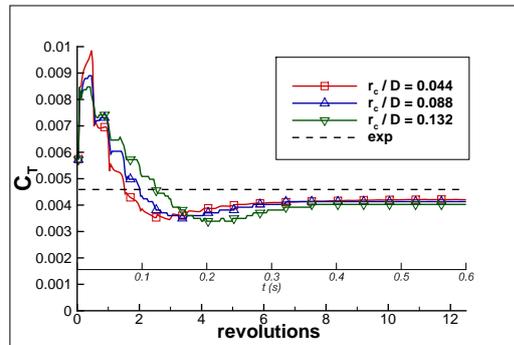
Il picco in prossimità di $r/R = 0.25$ è determinato da una velocità ascensionale locale indotta dal vortice di radice.

In assenza di moto in direzione radiale degli elementi di scia, in figura 5.23 viene riportata solo la posizione del vortice di estremità lungo l'asse. È possibile notare la sovrapposizione delle curve per r_c diversi che denota la scarsa influenza della dimensione del *vortex core radius* sulla evoluzione della scia e inoltre la figura 5.23b relativa a un $Dt = 0.003s$ mostra un ottimo accordo tra posizione assiale del vortice di estremità calcolata e sperimentale.

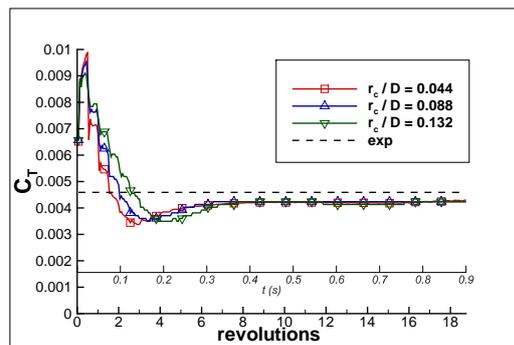
Il modello di scia 1 DoF, non modellando la deformazione completa della scia, permette l'utilizzo di valori di r_c più bassi rispetto a quelli testati per i modelli di scia precedenti, la figura 5.24 mostra il C_l calcolato con $r_c/D =$

0.004 ovvero più piccolo di un ordine di grandezza rispetto al minimo valore testato precedentemente.

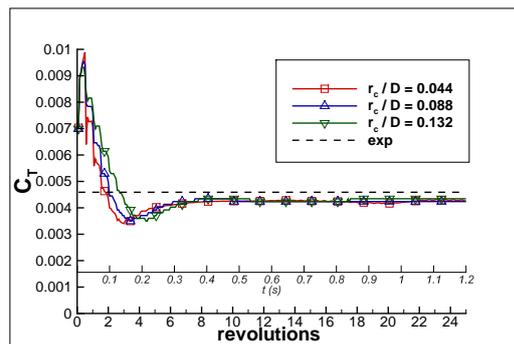
In sintesi possiamo affermare che il modello di scia 1DoF fornisce buoni risultati in termini di distribuzione di carico e posizione assiale del vortice di estremità; l'aumento di r_c determina un progressivo allontanamento del carico calcolato da quello sperimentale ma non influenza significativamente la traiettoria del vortice di estremità, questo può portare alla conclusione che la causa delle differenze tra le soluzioni sia da attribuire a fenomeni locali di interazione tra scia e pala e quindi anche in questo caso modellare la prima porzione di scia con pannelli potrebbe portare ad un miglioramento delle soluzioni.



(a) $Dt = 0.002s$

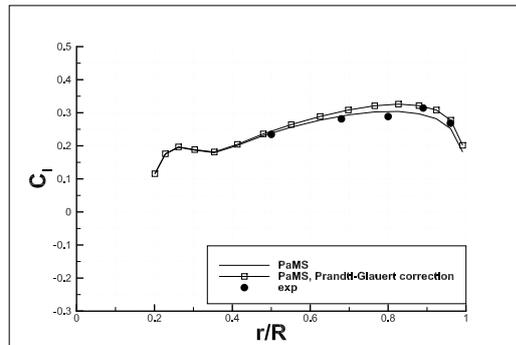


(b) $Dt = 0.003s$

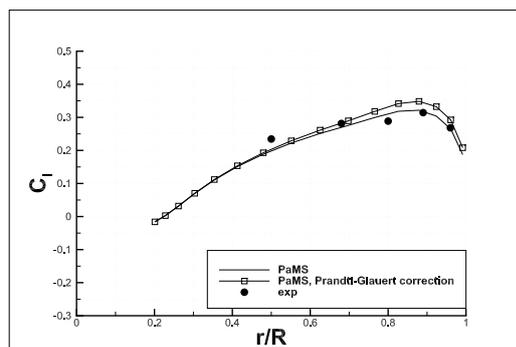


(c) $Dt = 0.004s$

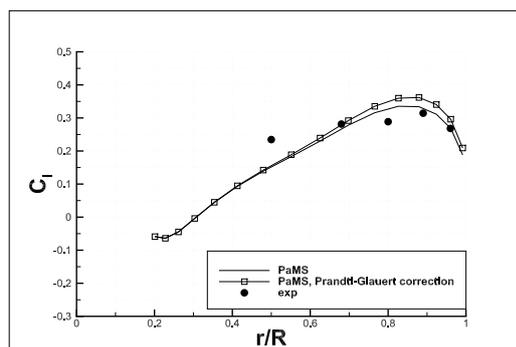
Figura 5.19: scia 1 DoF: coefficiente di spinta (C_T)



(a) $r_c/D = 0.044$

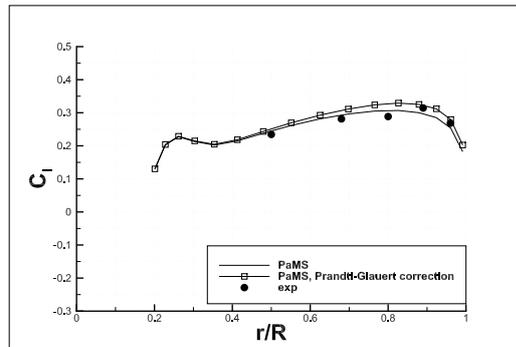


(b) $r_c/D = 0.088$

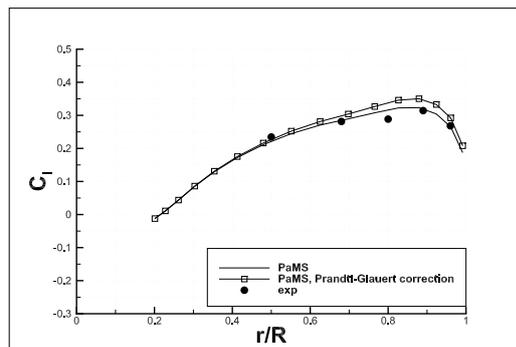


(c) $r_c/D = 0.132$

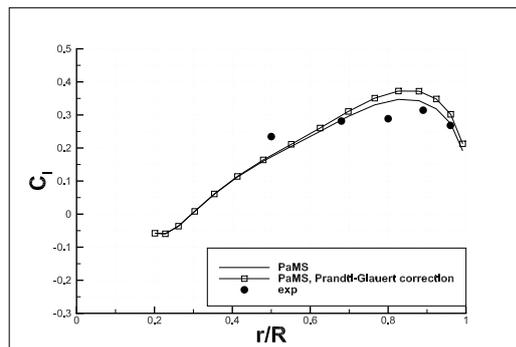
Figura 5.20: scia 1 DoF: distribuzione di C_l per $Dt = 0.002s$



(a) $r_c/D = 0.044$

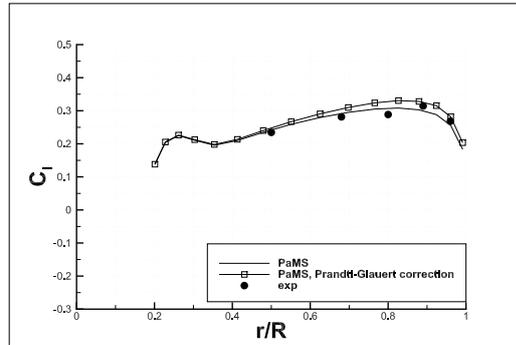


(b) $r_c/D = 0.088$

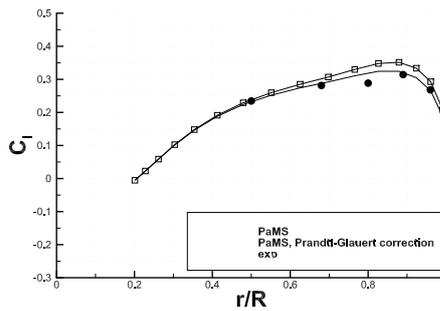


(c) $r_c/D = 0.132$

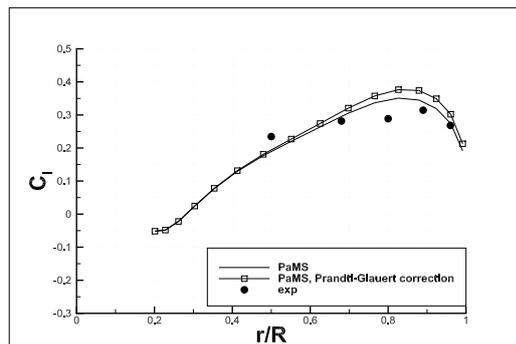
Figura 5.21: scia 1 DoF: distribuzione di C_l per $Dt = 0.003s$



(a) $r_c/D = 0.044$

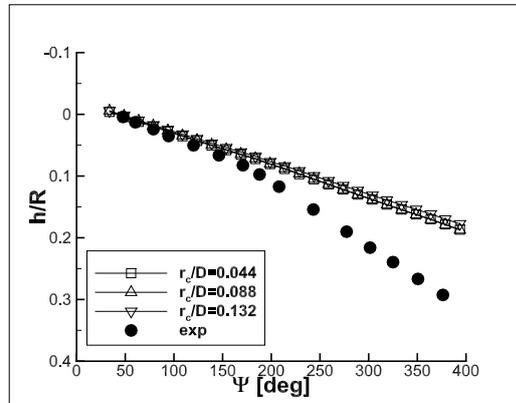


(b) $r_c/D = 0.088$

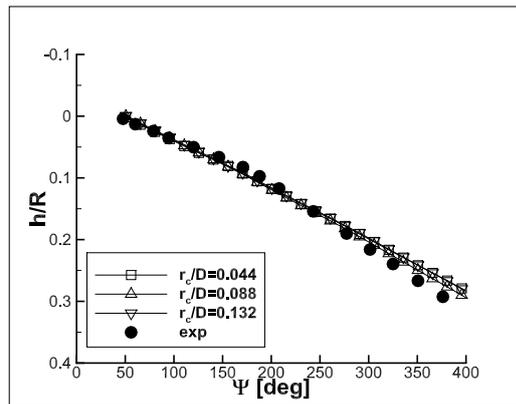


(c) $r_c/D = 0.132$

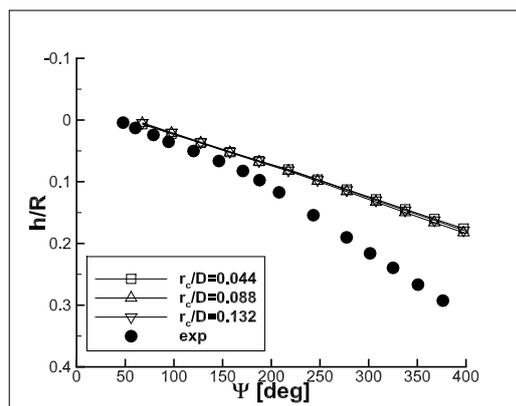
Figura 5.22: scia 1 DoF: distribuzione di C_l per $Dt = 0.004s$



(a) $Dt = 0.002s$



(b) $Dt = 0.003s$



(c) $Dt = 0.004s$

Figura 5.23: scia 1 DoF: posizione assiale del *tip vortex*

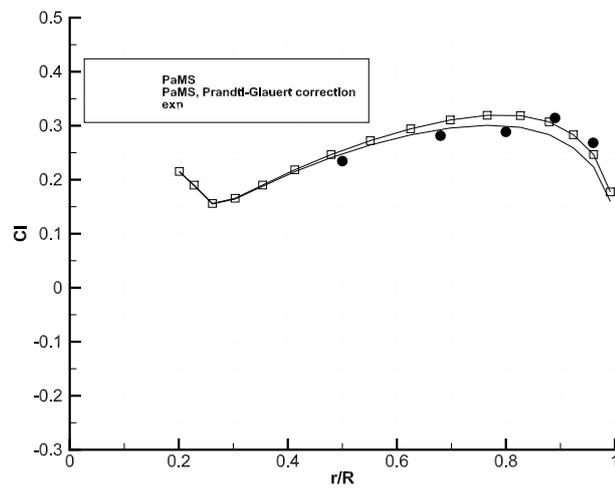


Figura 5.24: scia 1 DoF: distribuzione di C_l per $Dt = 0.002s$ e $r_c/D = 0.004$

CONCLUSIONI

I test svolti hanno mostrato che il modello a vortoni, con opportune impostazioni, garantisce una buona qualità dei risultati con tempi di calcolo relativamente brevi ed è quindi caratterizzato da una maggiore efficienza computazionale rispetto ai metodi CFD basati su RANS. In particolare è stato osservato che la distribuzione di carico lungo le pale dipende maggiormente dal campo di moto localmente indotto dagli elementi computazionali più vicini al rotore e solo in maniera minore dalla forma ed evoluzione della scia, inoltre i risultati migliori si ottengono quando la porzione di scia più vicina alle pale viene modellata con pannelli o quando viene limitata artificialmente l'induzione degli elementi di scia (*scia 1DoF*).

I test effettuati inoltre hanno evidenziato come il modello ad un grado di libertà riesca a simulare una propagazione della scia a distanza maggiore rispetto a quanto fatto dagli altri modelli e in linea con il comportamento reale, purtroppo al momento non sono disponibili dati numerici o sperimentali per effettuare un confronto diretto al riguardo e validare quindi i risultati ottenuti.

I risultati ottenuti mostrano quindi che l'implementazione di un modello a vortoni in un metodo a pannelli ne espande le potenzialità e i campi di applicazione, rendendo possibile l'analisi di fenomeni come hovering con vento

laterale, interazione tra rotore e corpi posti a valle, effetto suolo, brownout⁴.

⁴riduzione di visibilità causata da polvere o sabbia sollevata dalla scia di un rotore quando si trova ad operare in prossimità del suolo

Bibliografia

- [1] Abbott I.H., Von Doenhoff A.E.:
“Theory of wing sections”
Dover, 1959.
- [2] Aksman M.J., Novikov E.A., Orszag S.A.:
“Vorton method in three-dimensional hydrodynamics”
Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- [3] Alkemade F., Nieuwstadt F.T.M., Van Groesen E.:
“The vorton method”
Delft University of Technology and University of Twente, 1993.
- [4] Alonso J.J., Sheffer S.G., Martinelli L., Jameson A.:
“Parallel unsteady simulation of the flow through a helicopter rotor in hover including aeroelastic effects”
Princeton University, 1996.
- [5] Anderson, J.D.Jr.:
“Fundamentals of Aerodynamics”
McGraw-Hill Book Company, 1982.
- [6] Ashby D.L.:
“Potential Flow Theory and Operation Guide for the Panel Code PMARC 14”
NASA/TM, 1999.

- [7] Ashby D.L., Dudley M., Iguchi S.K.:
“Development and Validation of an Advanced Low-Order Panel Method
NASA, 1988.
- [8] Ashby D.L., Dudley M.R., Iguchi S.K., Browne L., Katz J.:
“Potential Flow Theory and Operation Guide for the Panel Code PMARC
NASA, 1991.
- [9] Ashley H., Landahl M.:
“Aerodynamics of wings and bodies
Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1958.
- [10] Baeder J.D., Duraisamy K.:
“High resolution wake capturing methodology for hovering rotors
University of Maryland at College Park, 2006.
- [11] Beale J.T., Majda A.:
“Vortex methods I: convergence in three dimensions
Math. Comput. 29(159) 1-27, 1982.
- [12] Beale J.T., Majda A.:
“Vortex methods II: higher order accuracy in two and three dimensions
Math. Comput. 39(159) 29-52, 1982.
- [13] Beale J.T.:
“On the accuracy of vortex methods at large times
Institute of Mathematics and Its Applications, University of Minnesota, 1987.
- [14] Boatwrigth D. W.:
“Measurements of velocity compoments in the wake of a full-scale helicopter rotor in hover
Mississippi State University, 1972.

- [15] Bramwell A.R.S., Done G., Balmford D.:
“Bramwell’s Helicopter Dynamics - secondo edition
AIAA, 2001.
- [16] Browne L.E., Ashby D.L.:
“Study of the Integration of Wind Tunnel and Computational Methods for Aerodynamic Configurations
NASA, 1989.
- [17] Caccavale P.:
“Un moderno metodo a potenziale per analisi fluidodinamiche
DIAS, Università di Napoli “Federico II”, 2006.
- [18] Caccavale P., de Nicola C.:
“A new panel method for unsteady flows
DIAS, Università di Napoli “Federico II”, 2007.
- [19] Caradonna F.X., Tung C.:
“Experimental and analytical studies of a model helicopter rotor in hover
NASA Technical Memorandum 81232, 1981.
- [20] Chatelain P., Curioni A., Bergdorf M., Rossinelli D., Andreoni W.,
Koumoutsakos P.:
“Billion vortex particle direct numerical simulations of aircraft wakes
Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197 1296-1304, 2008.
- [21] Chatelain P., Leonard A.:
“Face-centered cubic lattices and particle redistribution in vortex methods
California Institute of Technology, 2002.
- [22] Conlisk A.T.:
“Modern Helicopter Aerodynamics
Department of Mechanical Engineering, Ohio State University, 1997

- [23] Cottet G-H., Koumoutsakos P.D.:
“Vortex Methods: Theory and Practice
Cambridge University Press, 2000.
- [24] de Crescenzo P.:
“Inviscid wake interaction with bodies: a theoretical investigation
DIAS, Università di Napoli Federico II, 2010.
- [25] de Nicola C.:
“Aerodinamica degli aeromobili
DIAS, Università di Napoli “Federico II”, Italy, 2005.
- [26] Doerffer P., Szulc O.:
“Numerical simulation of model helicopter rotor in hover
Institute of Fluid-Flow Machinery PAS, 2008.
- [27] Egolf T.A., Landgrebe A.J.:
“Helicopter Rotor Wake Geometry and Its Influence in Forward Flight NASA
Contractor Report 3727, 1983.
- [28] Egolf T.A., Sparks S.P.:
*“A full potential flow analysis with realistic wake influence for helicopter rotor
airload prediction*
NASA Contractor Report 4007, 1987.
- [29] Gharakhani A.:
*“A survey of grid-free methods for the simulation of 3-D incompressible flows
in bounded domains*
Sandia National Laboratories. 1997.
- [30] Gui Y.F. and Dou W.B.:
“A rigorous and completed statement on Helmholtz theorem
Southeast University, 2007.

- [31] Heineck J.T., Yamauchi G.K., Wadcick A.J., Lourenco L., Abrego A.I:
Application of three-component PIV to a hovering rotor wake
American Helicopter Society 56th Annual Forum, Virginia Beach, Virginia,
2000.
- [32] Hess J.L.:
Panel methods in computational fluid dynamics
Annu. Rev, Fluid Mech, 1990.
- [33] Hess J.L., Smith A.M.O:
Calculation of potential flow about arbitrary bodies
Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, pp 1-138 1967.
- [34] Hoffmann K.A. and Chiang S.T.:
Computational fluid dynamics - Volume I
Engineering, 2000.
- [35] Johnson W. :
Helicopter Theory
Dover, 1994.
- [36] Katz J., Plotkin A.:
Low-speed Aerodynamics from wing theory to panel methods
McGraw-Hill, 1991.
- [37] Landgrebe A.J.:
An analytical and experimental investigation of helicopter rotor hover performance and wake geometry characteristics
U.S. Army Air Mobility Research and Development Laboratory, Fort Eustis,
Virginia, 1971.
- [38] Lebental S.:
Optimization of the aerodynamics of small-scale flapping aircraft in hover
Duke University, 2008.

- [39] Lee D.J.:
“Numerical simulations of wake structure generated by rotating blades using a time marching, free vortex blob method”
European Journal of Mechanics - B/FLUIDS. Vol. 18, (1), 147-159, 1999
- [40] Maskew B.:
“Program VSAERO Theory Document
NASA Contractor Report 4023, 1987.
- [41] McAlister K.W.:
“Rotor Wake Development During the First Revolution
American Helicopter Society 59th Annual Forum, Phoenix, Arizona, 2003.
- [42] Opoku D.G., Triantos D.G., Nitzsche F., Voutsinas S.G.:
“Rotorcraft aerodynamic and aeroacoustic modeling using vortex particle methods
Carleton University, National Technical University of Athens, 2002.
- [43] Park S.I., Kim M.J.:
“Vortex Fluid for Gaseous Phenomena
Carnegie Mellon University, Ewha Womans University, 2005.
- [44] Pozzi A.:
“Lezioni di Gasdinamica
DIAS, Università di Napoli “Federico II”, a.a. 2002-2003.
- [45] Sankar L.N., Berkman M.E., Berezin C.R., Torok M.S.:
“A Navier-Stokes/Full potential/Free wake method for advancing multi-bladed rotors
American Helicopter Society 53rd Annual Forum, Virginia Beach, Virginia, 1997.

- [46] Seddon J., Newman S.:
“Basic Helicopter Aerodynamics, third edition
Wiley, 2011.
- [47] Spalart P.R.:
“Vortex methods for separated flows
NASA Technical Memorandum 100068, 1988.
- [48] Srinivasan G.R., Raghavan V., Duque E.P.N.:
“Flowfield analysis of modern helicopter rotors in hover by naver-stokes method
International thechnical specialists meeting, Philadelphia, 1991.
- [49] Srinivasan G.R., Baeder J.D., Obayashi S., McCroskey W.J.:
“Flowfield of a lifting hovering rotor - A Navier-Stokes simulation
NASA Technical Memorandum 102862, 1990.
- [50] Srinivasan G.R., McCroskey W.J.:
“Navier-Stokes simulation of unsteady three-dimensional blade-vortex interactions
The winter annual meeting of the American Society of Mechanical Engineers,
Chicago, 1988.
- [51] Steinhoff J.S., Krishnamurthi R.:
“Free wake analysis of helicopter rotor blades in hover using a finite volume technique
The University of Tennessee Space Institute, 1988.
- [52] Strickland J.H., Baty R.S.:
“A three-dimensional fast solver for arbitrary vorton distributions
Sandia National Laboratories, 1994.
- [53] Strickland J.H., Homicz G.F., Porter V.L., Gossler A.A.:
“A 3-D vortex code for parachute flow predictions: VIPAR version 1.0
Sandia National Laboratories, 2002.

- [54] Tognaccini R.:
“Lezioni di Aerodinamica
DIAS, Università di Napoli “Federico II”, a.a. 2009-2010.
- [55] Voutsinas S.G., Belesais M.A., Rados K.G.:
“Investigation of the Yawed Operation of Wind Turbines by means of a Vortex Particle Method
National Technical University of Athens, 1994.
- [56] Whitehouse G.R., Tadghighi H.:
“Investigation of hybrid grid-based CFD methods for rotorcraft flow analysis
American Helicopter Society Aeromechanics Specialists Meeting, San Francisco, CA, 2010.
- [57] Willis D.J.:
“An unsteady, accelerated, high order panel method with vortex particle wakes
Massachusetts Institute of Technology, 2006.
- [58] Willis D.J., Paraire J., White J.K.:
“A combined pfft-multipole tree code, unsteady panel method with vortex particle wakes
Massachusetts Institute of Technology, 2006.
- [59] Winckelmans G.S., Leonard A.:
“Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows
California Institute of Technology, 1993.
- [60] Nola N.:
“A vorton wake model for panel methods
DIAS, Università di Napoli “Federico II”, 2009.

- [61] Carlomagno G.M.:
“Fluidodinamica
Liguori Editore, first edition, 2001.
- [62] Monti R., Savino R.:
“Aerodinamica, parte I
Liguori Editore, second edition, 2001.
- [63] Monti R., Savino R.:
“Aerodinamica, parte II
Liguori Editore, second edition, 2001.